11.1. Kettenregel

(a) Es seien Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$f(y_1, y_2, y_3) := \begin{pmatrix} y_1 y_2 + y_3 \\ y_2 e^{y_1} \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ e^{x_1 + x_2} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Differential der Funktion $f \circ g$, also $d\,(f \circ g)\,(x_1, x_2)$, auf zwei verschiedene Weisen. Einerseits, indem Sie explizit die Funktion $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestimmen und dessen Differential berechnen, und andererseits mit der Kettenregel.

(b) Es seien Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$f(y_1, y_2, y_3) := \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ y_2 y_3 \end{pmatrix}, \quad g(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ x \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Differential der Funktion $f \circ g$, also $d\,(f \circ g)\,(x)$, auf zwei verschiedene Weisen. Einerseits, indem Sie explizit die Funktion $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ bestimmen und dessen Differential berechnen, und andererseits mit der Kettenregel.

(c) Es seien Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt gegeben:

$$f(z_1, z_2) := \log(1 + z_2^2), \quad g(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - e^{-x_2} \\ x_1 x_3 - x_2 x_3 \end{pmatrix},$$

Berechnen Sie das Differential der Funktion $f \circ g \circ h$, also $d\,(f \circ g \circ h)\,(x_1, x_2, x_3)$, auf zwei verschiedene Weisen. Einerseits, indem Sie explizit die Funktion $f \circ g \circ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bestimmen und dessen Differential berechnen, und andererseits mit der Kettenregel.

11.2. Kugelkoordinaten

Die Abbildung $\Phi :]0, \infty[\times]0, \pi[\times] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Man nennt Φ auch die *Kugelkoordinaten*.

(a) Skizzieren Sie die Bilder der Abbildungen $r \mapsto \Phi(r, \theta_0, \varphi_0), \theta \mapsto \Phi(r_0, \theta, \varphi_0)$ und $\varphi \mapsto \Phi(r_0, \theta_0, \varphi)$ für einige fixierte Werte $r_0 \in]0, \infty[$, $\theta_0 \in]0, \pi[$, $\varphi_0 \in] - \pi, \pi[$.

(b) Was ist das Bild von Φ?

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von Φ und zeigen Sie, dass:

$$\det\left(d\Phi(r,\theta,\varphi)\right) = r^2\sin(\theta)$$

(d) Beweisen Sie, dass die Abbildung Φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist (das heisst Φ ist injektiv und die Umkehrabbildung Φ^{-1} ist von der Klasse C^1).

Hinweis: Hier kann der Umkehrsatz hilfreich sein.

11.3. Zylinderkoordinaten

Die Abbildung $\Phi :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch:

$$\Phi(r,\varphi,h) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

Man nennt Φ auch die *Zylinderkoordinaten*.

(a) Skizzieren Sie die Bilder der Abbildungen $r\mapsto\Phi(r,\varphi_0,h_0)$, $\varphi\mapsto\Phi(r_0,\varphi,h_0)$ und $h\mapsto\Phi(r_0,\varphi_0,h)$ für einige fixierte Werte $r_0\in]0,\infty[$, $\varphi_0\in]-\pi,\pi[$, $h_0\in\mathbb{R}$.

(b) Was ist das Bild von Φ?

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von Φ und zeigen Sie, dass:

$$\det\left(d\Phi(r,\varphi,h)\right) = r$$

(d) Beweisen Sie, dass die Abbildung Φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist.

Hinweis: Hier kann der Umkehrsatz hilfreich sein.

11.4. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Ist die folgende Abbildung lokal invertierbar mit C^1-Inverser in einer Umgebung von $(x, y, z) = (1, 1, 0)$?

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy + z \\ x^2(y + z^3)e^z \\ \sin(xz)\cos(yz) \end{pmatrix}$$

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Weiss nicht.

(b) Ist die folgende Abbildung lokal invertierbar mit C^1-Inverser in einer Umgebung von $(x, y, z) = (0, 0, 0)$?

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy + z \\ x^2(y + z^3)e^z \\ \sin(xz)\cos(yz) \end{pmatrix}$$

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Weiss nicht.

(c) Ist die folgende Abbildung $f :]0, \infty[\times \mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild?

$$f(r, \theta, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cosh(\varphi)\cosh(\theta) \\ r\sinh(\varphi)\cosh(\theta) \\ r\sinh(\theta) \end{pmatrix}$$

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Weiss nicht.