12.1. Extrema mit Nebenbedingungen

Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := xy$$

(a) Argumentieren Sie, weshalb die Funktion f auf $M_1 := \overline{B_1(0)}$ und auf $M_2 := S^1$ jeweils sein Maximum und Minimum annimmt.

Hinweis: Es ist $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Man benutze den Extremumssatz und somit die Eigenschaften von stetigen Funktionen und kompakten Mengen.

(b) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von f auf S^1 mittels Lagrange-Multiplikatoren.

(c) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von f auf S^1 mittels der Parametrisierung $x = \cos(\varphi)$, $y = \sin(\varphi)$.

Hinweis: Man beachte, dass man die Funktion $\tilde{f}(\varphi) := f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ und ihre Extrema betrachten kann. Warum?

(d) Bestimmen Sie nun die Extrema von f auf $\overline{B_1(0)}$.

12.2. Satz von der Impliziten Funktion

Wir wollen die folgende Gleichung lösen:

$$f(x,y,z) := e^{x^2}y + e^{z^2}\arctan x + \log(1 + x^2y^2) = 1$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$f(0,1,0) = 1$$

(b) Beweisen Sie, dass:

$$\partial_y f(0,1,0) \neq 0$$

(c) Folgern Sie, dass, für $\delta > 0$ klein genug, eine C^1-Funktion $g :]-\delta,\delta[\times]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ mit $g(0,0) = 1$ sowie:

$$f(x, g(x,z), z) = 1, \quad \forall x, z \in]-\delta, \delta[,$$

existiert. Bestimmen Sie zudem das Differential $dg(0,0)$.

Hinweis: Man bemerke, dass $f(x, g(x,z), z) = 1$. Hieraus lässt sich das Differential $dg(0,0)$ per Kettenregel bestimmen.

(d) Verwenden Sie das Differential von g in $(0,0)$ um g linear zu approximieren. Setzen Sie einige Werte der linearen Approximation anstelle von g in die Gleichung unten ein:

$$f(x, g(x,z), z) = 1$$

12.3. Satz von Fubini

Verwenden Sie den Satz von Fubini, um die folgenden Integrale zu berechnen oder argumentieren Sie, weshalb sich Satz 8.2.1 nicht anwenden lässt.

(a) $\displaystyle\int_{[0,2\pi]\times[1,2]} y\sin(xy)\,d\mu$

(b) $\displaystyle\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[-1,1]} z^4\sin(x+y)\,d\mu$

(c) $\displaystyle\int_{[0,1]^3} xy^2z^3\,d\mu$

(d) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,d\mu$

12.4. Anwendbarkeit des Satzes von Fubini

Sei $Q = [0,1]\times[-1,1]$ und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)y$, also

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das iterierte Integral

$$\int_0^1 \Big(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

(b) Beweisen Sie, dass f nicht Riemann-integrabel ist auf Q.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Treppenfunktion e mit $e \le f$ auch $e(x,y) \le \min(y,0)$ erfüllt, und jede Treppenfunktion g mit $g \ge f$ auch $g(x,y) \ge \max(y,0)$ erfüllt.

Bemerkung: Die Voraussetzung $f \in C^0(Q)$ im Satz von Fubini ist wichtig. Diese Aufgabe zeigt, dass man für allgemeine Funktionen aus der Existenz eines der iterierten Integrale nicht auf die Existenz des Riemann-Integrals schliessen kann.

12.5. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt für Funktionen $f : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

(i) Wenn f stetig ist, so nimmt f sein Maximum und Minimum an.

(ii) Wenn f differenzierbar ist, so kann f sein Maximum und Minimum nur in Punkten $(x, y) \in B_1(0)$ annehmen, in denen $df(x, y) = (0, 0)$ gilt.

(iii) Es kann sein, dass f sein Maximum und/oder Minimum auf $\partial B_1(0) = S^1$ annimmt.

(iv) Um die Extrema von einer C^1-Funktion f auf $\partial B_1(0) = S^1$ zu bestimmen, kann man Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

(b) Man betrachte die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ und die Nebenbedingung $g(x, y, z) = x+y+z = 3$. Welche der folgenden Punkte sind gemäss Lagrange-Multiplikatorenregel kritisch bei der Maximierung/Minimierung von f unter der Nebenbedingung $g = 3$?

(i) $(1, 1, 1)$

(ii) $(2, -1, 2)$

(iii) $(3, 0, 0)$

(iv) $(1, 0, 2)$