13.1. Ein Kriterium für die Jordan-Messbarkeit

Beweisen Sie, dass ein beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Elementarfiguren $E, G \subset \mathbb{R}^n$ existieren mit $E \subset \Omega \subset G$ und

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon, \tag{1}$$

also wenn

$$\mu(\partial\Omega) = 0. \tag{2}$$

In diesem Fall gilt

$$\mu(\Omega) = \inf\Big\{\mu(G) : G \supset \Omega \text{ El. Fig.}\Big\} = \sup\Big\{\mu(E) : E \subset \Omega \text{ El. Fig.}\Big\}. \tag{3}$$

13.2. Jordan-Messbarkeit der Union und des Schnittes von Jordan-messbaren Mengen

Betrachten Sie zwei Jordan-messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass $A \cup B$ und $A \cap B$ Jordan-messbar sind. Beweisen Sie zudem die folgende Identität:

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

13.3. Jordan-Bereiche

Betrachten Sie die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch die folgende Beschreibung:

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{2}\sin(y) - 1 \leq x \leq -\frac{1}{2}\sin(y) + 1,\ x^2 - 1 \leq y \leq \pi + 1 - x^2\right\}$$

Beweisen Sie, dass A ein Jordan-Bereich ist.

13.4. Integration über Jordan-Bereiche

Verwenden Sie die Darstellungen als Hypo-/Hyper-Graphen, um die folgenden Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{\Omega_\psi} y^3\, d\mu \quad$ mit $\psi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(b) $\displaystyle\int_{\Omega_\psi} e^{\cos(x)}\, d\mu \quad$ mit $\psi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \sin(x)$

(c) $\displaystyle\int_{B_r(0)} 1\, d\mu \quad$ für alle $r \geq 0$

(d) $\displaystyle\int_{B_1(0)} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)\,d\mu$

Hinweis: Man erinnere sich an die Notation. Für eine beliebige Funktion $\psi \in C^0([a,b])$ mit $\psi \geq 0$ definieren wir $\Omega_\psi := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq \psi(x)\}$ (vgl. Beispiel 8.3.2-i) im Vorlesungsskript).

13.5. Satz von Green

Betrachten Sie die Menge:

$$A := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \Big|\ x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\Big\},$$

sowie die folgende Differentialform:

$$\lambda := y^2e^x dx + x^3y dy$$

(a) Skizzieren Sie das Gebiet A. Ist A ein C^1_{pw}-Gebiet? Warum?

(b) Berechnen Sie das folgende Integral direkt (nicht mit Satz von Green):

$$\int_{\partial A} \lambda,$$

wobei der Rand ∂A im Gegenuhrzeigersinn parametrisiert werden soll.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe des Satzes von Green:

$$\int_{\partial A} \lambda,$$

wobei der Rand ∂A im Gegenuhrzeigersinn parametrisiert werden soll.

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Berechnen Sie das folgende Integral für $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}, \psi(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{\Omega_\psi} e^{x-\frac{1}{3}x^3} y \, d\mu$$

(i) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$

(ii) $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$

(iii) $e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

(iv) $e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}$

(v) 0

(b) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{B_1(0)} e^{x-\frac{1}{3}x^3} y \, d\mu$$

(i) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$

(ii) $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$

(iii) $e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

(iv) $e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}$

(v) 0

(c) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{B_1(0)} e^{x-\frac{1}{3}x^3} |y| \, d\mu$$

(i) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$

(ii) $\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}\right)$

(iii) $e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

(iv) $e^{-\frac{2}{3}} - e^{\frac{2}{3}}$

(v) 0