

Lösungsvorschlag Serie 1

1. Dicker Pulli - bald kommt der Winter

Um eine Körpertemperatur von $T_M = 37^\circ\text{C}$ auch bei kühlerem Wetter halten zu können, muss der Mensch sich isolierende Kleidung anziehen. Wir untersuchen, wie viele Wollpullis ein Mensch braucht, um bei winterlichen Umgebungstemperaturen nicht frieren zu müssen. Der Wärmefluss durch die Kleidung lässt sich durch folgendes Gesetz beschreiben:

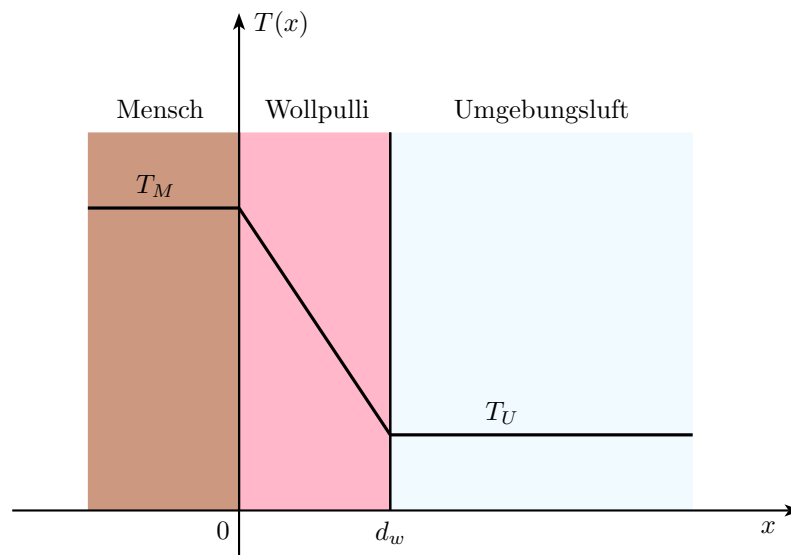
$$F = -\gamma \frac{dT}{dx}$$

mit einem materialabhängigen Wärmeleitkoeffizienten γ in $[\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}]$.

- a) Skizzieren Sie in der untenstehenden Figur den Verlauf der Temperatur zwischen Mensch und Umwelt bei einer Umgebungstemperatur von $T_U < T_M$. Sowohl Mensch als auch Umwelt seien vollständig durchmischert, und das System sei im Gleichgewicht.

Hinweis: Überlegen Sie, warum der Wärmefluss in jedem Punkt x der Kleidung gleich gross sein muss.

Lösung:



- b) Berechnen Sie den Wärmefluss F pro Fläche durch den Pulli. Wärmeleitkoeffizient von Wolle: $\gamma_w = 0.04 \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, Dicke des Pullis: $d_w = 1 \text{cm}$ (Norwegerpulli), Aussen-temperatur $T_U = -3^\circ\text{C}$.

Bitte wenden!

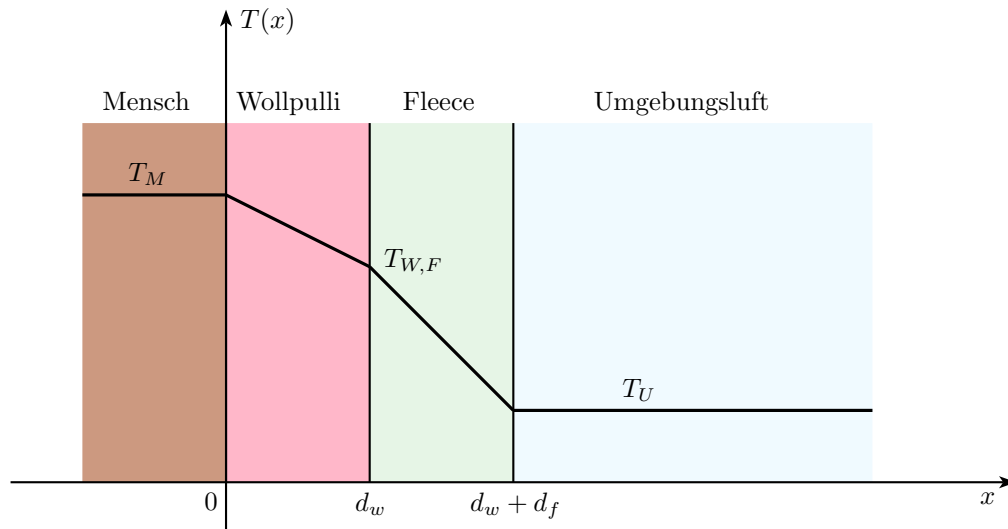
Lösung:

$$F = -\gamma_w \frac{T_U - T_M}{d_w} = -0.04 \frac{-40}{0.01} \text{ W m}^{-2} = 160 \text{ W m}^{-2}$$

- c) Ein Mensch gibt in Ruhe etwa 90 W m^{-2} an Wärme über die Haut ab. Wird der Hautoberfläche mehr Wärme entzogen als abgegeben wird, so friert der Mensch. Welche Dicke d_f müsste eine über den Wollpulli gezogene Fleecejacke haben, damit der Mensch nicht bei -3°C im Freien friert (siehe Skizze unten)? Rechnen Sie mit einem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten von Polyester $\gamma_f = 0.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst aus dem Wärmefluss durch den Wollpulli die Temperatur $T_{W,F}$ an der Grenzfläche zwischen Pulli und Fleece. Runden Sie diesen Wert auf die nächste ganze Zahl, um runde Zahlen zu erhalten. Skizzieren Sie in der untenstehenden Figur wiederum den Verlauf der Temperatur zwischen Mensch und Umwelt.

Lösung:



Fluss durch Wollpulli (I): $F_w = -\gamma_w \frac{T_{W,F} - T_M}{d_w}$

Fluss durch Fleece (II): $F_f = -\gamma_f \frac{T_U - T_{W,F}}{d_f}$

Desweiteren gilt, damit der Mensch nicht friert: $F_w = F_f = 90 \text{ W m}^{-2}$

Auflösen von (I) nach $T_{W,F}$ ergibt:

$$T_{W,F} = \frac{F_w d_w}{-\gamma_w} + T_M = 14.5^\circ\text{C} \approx 15^\circ\text{C}$$

Einsetzen in (II) und Auflösen nach d_f :

$$d_f = -\gamma_f \frac{T_U - T_{W,F}}{F_f} = 0.04 \text{ m}$$

Der Fleece sollte also ganze 4cm dick sein. Man braucht also sehr viel Kleidung um bei -3°C draussen zu überleben, ohne sich zu bewegen.

Siehe nächstes Blatt!

2. Scuba Diving

Eine der grossen Herausforderungen beim Tauchen ist, dass der Partialdruck von Sauerstoff im Gasgemisch, das man einatmet, weder zu hoch noch zu tief sein darf. Fällt er unter 0.16 bar (16 kPa, absolut), dann läuft man Gefahr zu ersticken. Wenn der Druck zu hoch ist, wird der Sauerstoff mit der Zeit toxisch, was Krämpfe verursacht. Die NOAA Tauchvorschrift gibt ein Maximum von 1.6 bar vor (bei 45 Minuten). Eine zweite Herausforderung ist der Tiefenrausch, der verursacht wird, wenn narkotische Gase, wie z.B. molekularer Stickstoff (N_2), bei zu hohem Druck eingeatmet werden. Als Grenzwert gilt ein N_2 Partialdruck von 4.5 bar.

Zusatzinformationen: Vereinfacht ausgedrückt, besteht Luft aus 78% Stickstoff, 21% Sauerstoff, und 1% anderer Gase. Der Partialdruck p_i eines bestimmten Gases i im Gasgemisch ist gleich dem Gesamtdruck p des Gasgemischs multipliziert mit dem Anteil x des Gases i , also $p_i = px$. So hat z.B. der Sauerstoff in der Luft den Partialdruck $p^{O_2} = 0.21p$. Der Gesamtdruck wird durch das Ventil am Druckregulator so eingestellt, dass es demjenigen Druck entspricht, welcher der Körper von aussen in einer bestimmten Tiefe erfährt. An der Oberfläche gehen wir von einem Druck von 1 atm (≈ 1 bar) aus. Unter der Wasseroberfläche nimmt der Druck mit 1 atm pro 10m zu. Der Henry-Koeffizient für Stickstoff ist $1639 \text{ l bar mol}^{-1}$ und für Sauerstoff ist er $769 \text{ l bar mol}^{-1}$: Der Henry-Koeffizient ist hier das Verhältnis zwischen dem Partialdruck des Gases in der Atemluft und der Konzentration des Gases im Blut.

- a) Was ist die maximal sichere Tiefe, in der komprimierte Luft mit der normalen Zusammensetzung ohne Risiko eingeatmet werden kann?

Lösung:

Der Druck steigt mit 1 atm pro 10m an. Da der Gesamtdruck die Summe der Partialdrücke ist und das Mischungsverhältnis konstant bleibt, steigen die Partialdrücke mit zunehmender Tiefe ebenfalls linear an. Damit erhält man für den Partialdruck von O_2 in der Tauchtiefe z :

$$p^{O_2}(z) = 0.21\text{bar} + \frac{0.21 \text{ bar}}{10 \text{ m}} \cdot z \quad (1)$$

und daraus für

$$p^{O_2^{\text{max}}} = 1.6\text{bar} \Rightarrow z^{\text{max}} = 66 \text{ m} \quad (2)$$

Für den Partialdruck von N_2 erhalten wir:

$$p^{N_2}(z) = 0.78\text{bar} + \frac{0.78 \text{ bar}}{10 \text{ m}} \cdot z \quad (3)$$

und damit

$$p^{N_2^{\text{max}}} = 4.5\text{bar} \Rightarrow z^{\text{max}} = 47.7 \text{ m} \quad (4)$$

Mit zunehmender Tiefe kann demnach bereits eine Stickstoffnarkose auftreten, bevor der steigende Sauerstoffpartialdruck zum Problem wird.

- b) Was ist die maximale sichere Tiefe, in der 30-prozentiger Sauerstoff eingeatmet werden kann? (Annahme: Ein Teil des Stickstoffs wurde durch Sauerstoff ersetzt, um die gewünschte Prozentzahl zu erreichen?)

Lösung:

Die Berechnung erfolgt analog Aufgabe (a), jedoch mit den neuen Steigungen, welche das veränderte Mischungsverhältnis berücksichtigen.

$$p^{O_2}(z) = 0.3\text{bar} + \frac{0.3 \text{ bar}}{10 \text{ m}} \cdot z \quad (5)$$

Bitte wenden!

Somit

$$p^{\text{O}_2^{\text{max}}} = 1.6\text{bar} \Rightarrow z^{\text{max}} = 43.3\text{m} \quad (6)$$

$$p^{\text{N}_2}(z) = (0.78 - 0.09)\text{bar} + \frac{0.69\text{ bar}}{10\text{ m}} \cdot z \quad (7)$$

Und somit

$$p^{\text{N}_2^{\text{max}}} = 4.5\text{bar} \Rightarrow z^{\text{max}} = 55.2\text{m} \quad (8)$$

Der Partialdruck von O_2 wird nun zum limitierenden Faktor.

- c) Trimix ist ein spezielles Gasgemisch, mit dem man in tieferen Tiefen tauchen kann. Es enthält 10% Sauerstoff, 70% Helium und 20% Stickstoff. Wie tief kann man mit Trimix im Tank tauchen?

Lösung:

Wie in Aufgabe (a) und (b) erhalten wir

$$p^{\text{O}_2}(z) = 0.1\text{bar} + \frac{0.1\text{ bar}}{10\text{ m}} \cdot z \quad (9)$$

und für

$$p^{\text{O}_2^{\text{max}}} = 1.6\text{bar} \Rightarrow z^{\text{max}} = 150\text{m} \quad (10)$$

$$p^{\text{N}_2}(z) = 0.2\text{bar} + \frac{0.2\text{ bar}}{10\text{ m}} \cdot z \quad (11)$$

und damit

$$p^{\text{N}_2^{\text{max}}} = 4.5\text{bar} \Rightarrow z^{\text{max}} = 215\text{m} \quad (12)$$

Man kann Trimix also bis zu Tiefen von 150 m verwenden.

- d) Wie gross ist die Konzentration von Sauerstoff/Stickstoff im Blut eines Tauchers (i) an der Oberfläche und (ii) in 66 m (Sauerstoff), respektive 48 m (Stickstoff) Tiefe, wenn der Taucher komprimierte Luft wie in Aufgabe (a) einatmet?

Lösung:

Aus den Einheiten der Henry-Koeffizienten, welche uns in der Aufgabenstellung gegeben sind, können wir schliessen, dass folgende Definition gewählt wurde:

$$p^{\text{gas}} = k_H \cdot c_{\text{blut}} \quad (13)$$

mit p^{gas} in bar, k_H in $\frac{1\text{ bar}}{\text{mol}}$ und c_{blut} in $\frac{\text{mol}}{1}$.

Somit können wir die Konzentrationen von Sauerstoff im Blut berechnen zu:

$$p^{\text{O}_2}(z=0) = 0.21\text{bar} = 769 \frac{1\text{ bar}}{\text{mol}} \cdot c_{\text{blut}}^{\text{O}_2} \quad (14)$$

und somit

$$c_{\text{blut}}^{\text{O}_2} = \frac{p^{\text{O}_2}}{k_H^{\text{O}_2}} = 0.27 \frac{\text{mmol}}{1} \quad (15)$$

In 66 m Tiefe erhalten wir

$$p^{\text{O}_2}(z=66\text{m}) = 1.6\text{bar} = 769 \frac{1\text{ bar}}{\text{mol}} \cdot c_{\text{blut}}^{\text{O}_2} \quad (16)$$

und somit

$$c_{\text{blut}}^{\text{O}_2} = \frac{p^{\text{O}_2}}{k_H^{\text{O}_2}} = 0.002 \frac{\text{mol}}{1} \quad (17)$$

Siehe nächstes Blatt!

Für den Stickstoff erhalten wir dann wie oben

$$c_{\text{blut}}^{\text{N}_2}(z = 0\text{m}) = 4.8 \times 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad (18)$$

$$c_{\text{blut}}^{\text{N}_2}(z = 48\text{m}) = 0.003 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad (19)$$

Die Konzentration von Sauerstoff darf sich im Blut also um das 7.4-fache der Oberflächenkonzentration steigern, die Konzentration von Stickstoff um das 6.25-fache, ohne dass beide Stoffe im Blut toxisch/narkotisch werden.