

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 11

MC 11-1. Seien $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$ und $Y \sim \mathcal{N}(-1, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ unbekannt ist. Welchen Wert hat σ^2 , wenn $\mathbb{P}[X \leq -1] = \mathbb{P}[Y \geq 2]$ gilt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

- (a) $\sigma^2 = 9$.
- (b) $\sigma^2 = 1$.
- (c) $\sigma^2 = 4$.
- (d) $\sigma^2 = 2$.

MC 11-2. Welche der folgenden Aussagen über statistische Tests sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

- (a) Wenn die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, schliessen wir, dass sie wahr sein muss.
- (b) Der statistische Test misst die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese wahr ist.
- (c) Es ist möglich, dass ein Test die Nullhypothese ablehnt, obwohl sie wahr ist. Allerdings kontrollieren wir die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.
- (d) Das Ergebnis des statistischen Tests ist zufällig.

Aufgabe 11-3. Wir vermuten, dass der Verzehr von natriumreichen Lebensmitteln bestimmte Auswirkungen auf den Blutdruck hat. Daher führen wir eine Studie durch, bei der wir zunächst den Blutdruck von 1000 Personen messen. Diese Personen übernehmen dann eine Ernährung, die sehr reich an Natrium ist. Nachdem sie dies getan haben, messen wir ihren Blutdruck erneut. Wir bezeichnen mit X_1, \dots, X_{1000} die Zufallsvariablen, die die Differenzen der Blutdruckwerte (nachher minus vorher) darstellen. Wir nehmen an, dass die X_i unabhängig sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ bekannt, aber $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt ist. Entwerfen Sie einen Test, um herauszufinden, ob Natrium eine Auswirkung auf den Blutdruck hat.

- (a) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternative.
- (b) Finden Sie eine Teststatistik und den kritischen Bereich auf dem Niveau 5%.
- (c) Angenommen, $\sigma^2 = 1$ und $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 80.2$. Was ist das Ergebnis des Tests?

Aufgabe 11-4. Ein pharmazeutisches Unternehmen führt ein neues Medikament ein und möchte eine Studie durchführen, um zu untersuchen, ob die Wirksamkeit dieses Medikaments mehr als 60% beträgt. Daher verabreichen sie das Medikament an 1000 Personen und sammeln die Daten. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das Medikament bei jeder Person entweder gewirkt hat oder nicht.

- (a) Finden Sie eine geeignete Klasse von Verteilungen für die Zufallsstichprobe X_1, \dots, X_{1000} und formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese, um zu testen, ob die Wirksamkeit mehr als 60% beträgt.

- (b) Betrachten Sie die Teststatistik $S := \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Verwenden Sie eine geeignete Approximation der Verteilung von S unter der Nullhypothese.
- (c) Finden Sie den approximativen kritischen Bereich für das Niveau $\alpha = 0.05$.

Hinweis: Sie können Wolfram Alpha verwenden, um die richtigen Quantile zu finden.

- (d) In unserer Studie war das Medikament für 650 Personen wirksam. Was ist das Ergebnis dieses Tests?

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.