Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 11 - Lösungen

MC 11-1. Seien $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$ und $Y \sim \mathcal{N}(-1, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ unbekannt ist. Welchen Wert hat σ^2, wenn $\mathbb{P}[X \leq -1] = \mathbb{P}[Y \geq 2]$ gilt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\sigma^2 = 9$.

(b) $\sigma^2 = 1$.

(c) $\sigma^2 = 4$.

(d) $\sigma^2 = 2$.

Lösung: (a) ist korrekt. Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung gilt

$$\mathbb{P}[X \leq -1] = \mathbb{P}\left[\frac{X-1}{\sqrt{4}} \leq \frac{-1-1}{\sqrt{4}}\right] = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1),$$
$$\mathbb{P}[Y \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 2] = 1 - \mathbb{P}\left[\frac{Y+1}{\sigma} \leq \frac{2+1}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right).$$

Ferner ist

$$1 - \Phi(1) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) \iff 1 = \frac{3}{\sigma} \iff \sigma = 3 \iff \sigma^2 = 9.$$

MC 11-2. Welche der folgenden Aussagen über statistische Tests sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) Wenn die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, schliessen wir, dass sie wahr sein muss.

(b) Der statistische Test misst die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese wahr ist.

(c) Es ist möglich, dass ein Test die Nullhypothese ablehnt, obwohl sie wahr ist. Allerdings kontrollieren wir die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

(d) Das Ergebnis des statistischen Tests ist zufällig.

Lösung:

(a) ist nicht wahr.

(b) ist ebenfalls nicht wahr. Wir können keine Wahrscheinlichkeit für das Ereignis {“die Nullhypothese ist wahr”} zuweisen. Dies liegt daran, dass die Wahrheit der Hypothese unbekannt ist, aber **nicht zufällig**.

(c) ist wahr.

(d) ist ebenfalls wahr. Da die beobachteten Daten zufällig sind, ist auch das Ergebnis des statistischen Tests zufällig.

Aufgabe 11-3. Wir vermuten, dass der Verzehr von natriumreichen Lebensmitteln bestimmte Auswirkungen auf den Blutdruck hat. Daher führen wir eine Studie durch, bei der wir zunächst den Blutdruck von 1000 Personen messen. Diese Personen übernehmen dann eine Ernährung, die sehr reich an Natrium ist. Nachdem sie dies getan haben, messen wir ihren Blutdruck erneut. Wir bezeichnen mit $X_1, \dots, X_{1000}$ die Zufallsvariablen, die die Differenzen der Blutdruckwerte (nachher minus vorher) darstellen. Wir nehmen an, dass die X_i unabhängig sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ bekannt, aber $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt ist. Entwerfen Sie einen Test, um herauszufinden, ob Natrium eine Auswirkung auf den Blutdruck hat.

(a) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternative.

(b) Finden Sie eine Teststatistik und den kritischen Bereich auf dem Niveau 5%.

(c) Angenommen, $\sigma^2 = 1$ und $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 80.2$. Was ist das Ergebnis des Tests?

Lösung:

(a) Wir können die Hypothesen wie folgt formulieren:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 0, \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_1 : \mu \neq 0.$$

(b) Wir wissen, dass unter der Nullhypothese die Zufallsvariable $S := \sum_{i=1}^{1000} X_i$ die Verteilung $\mathcal{N}(0, 1000\sigma^2)$ hat. Folglich gilt unter der Nullhypothese

$$\frac{S}{\sqrt{1000\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Wir möchten c so finden, dass

$$\mathbb{P}_0\big[|S| \geq c\big] = \mathbb{P}_0\big[S \notin (-c, c)\big] = 0.05.$$

Es gilt

$$\mathbb{P}_0[S \notin (-c,c)] = 0.05 \iff \mathbb{P}_0\left[\frac{S}{\sqrt{1000\sigma^2}} \notin \left(-\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}, \frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\right)\right] = 0.05.$$

Wegen der Symmetrie der Normalverteilung haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0\left[\frac{S}{\sqrt{1000\sigma^2}} \notin \left(-\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}, \frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\right)\right] &= \Phi\Big(-\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\Big) + \left(1 - \Phi\Big(\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\Big)\right) \\ &= 2\left(1 - \Phi\Big(\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\Big)\right).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0\big[S \notin [-c,c]\big] = 0.05 &\iff 2\bigg(1 - \Phi\Big(\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\Big)\bigg) = 0.05 \\ &\iff \Phi\bigg(\frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}}\bigg) = 0.975 \\ &\iff \frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}} = \Phi^{-1}(0.975) \\ &\iff \frac{c}{\sqrt{1000\sigma^2}} = 1.96 \\ &\iff c = 1.96\sqrt{1000\sigma^2}.\end{aligned}$$

Der kritische Bereich ist somit $\big(-\infty, -1.96\sqrt{1000\sigma^2}\big] \cup \big[1.96\sqrt{1000\sigma^2}, \infty\big)$, und wir lehnen die Nullhypothese ab, wann $\sum_{i=1}^{1000} x_i \leq -1.96\sqrt{1000\sigma^2}$ oder $\sum_{i=1}^{1000} x_i \geq 1.96\sqrt{1000\sigma^2}$.

(c) Wir haben $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 80.2 > 1.96\sqrt{1000} \approx 61.98$. Daher lehnen wir die Nullhypothese ab und haben gezeigt, dass eine natriumreiche Diät einen signifikanten Effekt auf unseren Blutdruck hat. Wir sehen auch, dass der Blutdruck gestiegen ist. Daher können wir behaupten, dass Natrium tendenziell den Blutdruck erhöht.

Aufgabe 11-4. Ein pharmazeutisches Unternehmen führt ein neues Medikament ein und möchte eine Studie durchführen, um zu untersuchen, ob die Wirksamkeit dieses Medikaments mehr als 60% beträgt. Daher verabreichen sie das Medikament an 1000 Personen und sammeln die Daten. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das Medikament bei jeder Person entweder gewirkt hat oder nicht.

(a) Finden Sie eine geeignete Klasse von Verteilungen für die Zufallsstichprobe $X_1, \ldots, X_{1000}$ und formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese, um zu testen, ob die Wirksamkeit mehr als 60% beträgt.

(b) Betrachten Sie die Teststatistik $S := \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Verwenden Sie eine geeignete Approximation der Verteilung von S unter der Nullhypothese.

(c) Finden Sie den approximativen kritischen Bereich für das Niveau $\alpha = 0.05$.

Hinweis: Sie können Wolfram Alpha verwenden, um die richtigen Quantile zu finden.

(d) In unserer Studie war das Medikament für 650 Personen wirksam. Was ist das Ergebnis dieses Tests?

Lösung:

(a) Wir modellieren diese Situation, indem wir annehmen, dass die X_i unabhängig mit einer Bernoulli-Verteilung mit einem Parameter $p \in [0,1]$ sind. Wir möchten testen, ob $p > 0.6$ ist. Daher formulieren wir die Hypothesen wie folgt:

$$\mathrm{H}_0 : p \leq 0.6 \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_1 : p > 0.6.$$

(b) Wir wissen: Falls die X_i unabhängige Bernoulli-Variablen mit Parameter $p \in [0,1]$ sind, so ist $S \sim \mathrm{Binom}(1000, p)$. Unter der Nullhypothese wissen wir, dass $p \leq 0.6$ ist. Da $p_0 = 0.6$ die nächstliegende Option zur Alternative ist, wählen wir $S \sim \mathrm{Binom}(1000, 0.6)$; sehen Sie (1) für eine genauere Erklärung.

Wir wissen, dass $\mathrm{Binom}(n, p)$ durch $\mathrm{Poisson}(np)$ approximiert werden kann. Daher gilt unter der Nullhypothese ungefähr $S \sim \mathrm{Poisson}(600)$.

Alternativ können wir den zentralen Grenzwertsatz in der Form des Satzes von de Moivre–Laplace verwenden. Mit $\mathbb{E}_{0.6}[X_i] = p_0 = 0.6$ und $\mathrm{Var}_{0.6}[X_i] = p_0(1-p_0) = 0.24$ haben wir unter der Nullhypothese ungefähr

$$\frac{S - 1000 \times 0.6}{\sqrt{1000 \times 0.24}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

(c) Wir möchten c so finden, dass gilt

$$\mathbb{P}_{0.6}[S \geq c] = 0.05.$$

Beachten Sie, dass

$$\mathbb{P}_p[S \geq c] \leq \mathbb{P}_{0.6}[S \geq c] = 0.05 \tag{1}$$

für jedes $p \in [0, 0.6]$ gilt. Mit anderen Worten: Der Test hat das richtige Niveau, auch wenn der wahre Wert von p kleiner als 0.6 ist.

Im ersten Fall, weil unter der Nullhypothese ungefähr gilt $S \sim \mathrm{Poisson}(600)$, können wir c als das 0.95-Quantil der Poisson-Verteilung mit Parameter 600 nehmen. Das ergibt, $c = 641$. Der approximative kritische Bereich ist somit $[641, \infty)$.

Im zweiten Fall haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{0.6}[S \geq c] &= \mathbb{P}\left[\frac{S-600}{\sqrt{240}} \geq \frac{c-600}{\sqrt{240}}\right] \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{c-600}{\sqrt{240}}\right).\end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{c-600}{\sqrt{240}}\right) &= 0.05 \\ \iff 0.95 &= \Phi\left(\frac{c-600}{\sqrt{240}}\right) \\ \iff \Phi^{-1}(0.95) &= \frac{c-600}{\sqrt{240}} \\ \iff 1.6449 &= \frac{c-600}{\sqrt{240}} \\ \iff 1.6449\sqrt{240} + 600 &= c. \end{aligned}$$

Da $1.6449\sqrt{240} + 600 \approx 625.5$, erhalten wir einen ähnlichen approximativen kritischen Bereich $[626, \infty)$.

Zum Vergleich: das exakte 0.95-Quantil von $\mathrm{Binom}(1000, 0.6)$ beträgt 625 und daher ist die zweite Approximation präziser. Die Approximation mittels der Poisson-Verteilung ist relativ ungenau, da $p = 0.6$ einen recht grossen Wert ist.

(d) Wir sehen, dass in beiden Fällen $s = 650$ im approximativen kritischen Bereich liegt. Daher lehnen wir die Nullhypothese ab und sind zuversichtlich, dass die Wirksamkeit mehr als 60% beträgt.

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.