Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 12

MC 12-1. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Sei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Wir definieren $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1]$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^{n} X_i \le a\right] = \mathbb{P}[Z \le a],\ a \in \mathbb{R}.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \le a\right] = \mathbb{P}[Z \le a],\ a \in \mathbb{R}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \le a\right] = \mathbb{P}[Z \le a],\ a \in \mathbb{R}.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \le a\right] = \mathbb{P}[Z \le a],\ a \in \mathbb{R}.$

MC 12-2. Gilt die richtige Antwort von MC 12-1 auch für endliche n exakt (also wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglassen würde)? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) Die richtige Antwort von MC 12-1 gilt auch, wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglässt, für alle Verteilungen die $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ erfüllen.

(b) Die richtige Antwort von MC 12-1 gilt auch, wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglässt, falls die X_i normalverteilt sind.

(c) Die richtige Antwort von MC 12-1 gilt auch, wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglässt, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

(d) Die richtige Antwort von MC 12-1 gilt nie, wenn man $\lim_{n\to\infty}$ weglässt.

Aufgabe 12-3. Es kostet 1 Dollar, an einem bestimmten Spielautomaten in Las Vegas zu spielen. Der Automat ist vom Casino so eingestellt, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.45 2 Dollar auszahlt (der Spieler gewinnt) und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.55 nichts auszahlt (das Casino gewinnt). Sei X_i der Nettogewinn des Casinos beim i-ten Spiel des Automaten. Sei $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ der Gewinn des Casinos nach n Spielrunden des Automaten. Unter der Annahme, dass aufeinanderfolgende Spiele unabhängig sind, finden Sie:

(a) $\mathbb{E}[S_n]$ und $\mathrm{Var}[S_n]$;

(b) die ungefähre Wahrscheinlichkeit, dass nach $10'000$ Runden des Automaten der Gewinn des Casinos zwischen 800 und 1100 Dollar liegt.

Nehmen Sie an, dass wir wissen, dass der Gewinn des Casinos nach $10'000$ Runden 1200 Dollar beträgt.

(c) Können wir sagen basierend auf unseren Beobachtungen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Automat gewinnt, grösser ist als der angegebene Wert 0.55? Nehmen Sie das Niveau $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 12-4. Ein Team von drei Personen wird zufällig aus einer Gruppe von sechs Personen ausgewählt. Von diesen sechs Personen sind drei Frauen (Anna, Elsa und Helga) und drei Männer (Franz, Mario und Tobias). Sei X die Anzahl der Frauen und Y die Anzahl der Männer im ausgewählten Team.

(a) Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Team nur aus Frauen besteht, gegeben, dass das Team mindestens eine Frau hat?

(b) Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Team nur aus Frauen besteht, gegeben, dass Helga im Team ist?

(c) Finden Sie die gemeinsame Verteilung von (X, Y). Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$.

(d) Berechen Sie $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[X+Y]$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

Aufgabe 12-5. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit X uniform verteilt auf $[0, 1]$ und Y exponentialverteilt mit Parameter 1. Seien $U = X + Y$ und $V = XY$.

(a) Berechnen Sie $E\left[\frac{V}{X^2+1}\right]$.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion sowie die Dichtefunktion von U.

(c) Berechnen Sie die beste lineare Prognose von V durch U.

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0, 1)$-Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.