Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 1 - Lösungen

MC 1-1. Seien $A, B \subseteq \Omega$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen nicht? (Genau eine Antwort ist richtig.)

Hinweis: Sie können ein Venn-Diagramm zeichnen.

(a) $(A \setminus B)^c = B \cup A^c$.

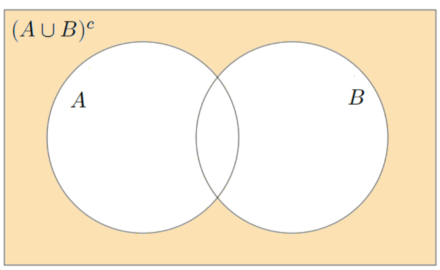
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

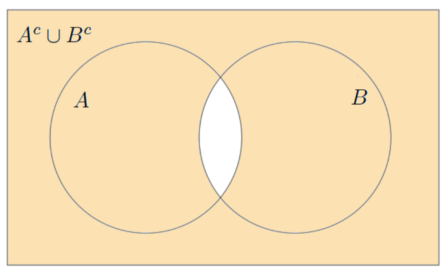
(c) $A \setminus B^c = A \cap B$.

(d) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

Lösung: (d) gilt nicht. Sei $\omega \in B \setminus A = B \cap A^c$. Dann haben wir $\omega \in A^c$, und somit auch $\omega \in A^c \cup B^c$. Jedoch ist $\omega \in B$ und somit auch $\omega \in A \cup B$, was $\omega \notin (A \cup B)^c$ ergibt.

Die Darstellung ist:





MC 1-2. Sei $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Welche der folgenden Kollektionen ist keine σ-Algebra auf Ω? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\mathcal{F}_1 := \{\emptyset, \Omega\}$.

(b) $\mathcal{F}_2 := \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}$.

(c) $\mathcal{F}_3 := \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}\}$.

(d) $\mathcal{F}_4 := \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}$.

Lösung: $\mathcal{F}_3$ ist keine σ-Algebra, denn zum Beispiel haben wir $\{\omega^1\} \in \mathcal{F}_3$, aber $\{\omega_1\}^c = \{\omega_2, \omega_3\} \notin \mathcal{F}_3$.

Aufgabe 1-3. Über einen Nachrichtenkanal werden der Reihe nach vier Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Grundraum Ω die Menge der 0-1-Folgen der Länge 4 gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\},$$

d.h. $\Omega = \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), \ldots, (1,1,1,1)\}$, und wir interpretieren (für $i = 1, \ldots, 4$) $x_i = 1$ als "i-tes Signal richtig übertragen" und $x_i = 0$ als "i-tes Signal falsch übertragen". Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

A : "Genau ein Signal wird falsch übertragen".

B : "Mindestens 2 Signale werden richtig übertragen".

C : "Höchstens 2 Signale werden richtig übertragen".

(a) Schreiben Sie die Ereignisse A, B und C als Teilmengen von Ω auf.

(b) Beschreiben Sie in Worten die Ereignisse $B \cap C$, $A \cup B$ und $A^c \cap C^c$.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C unter der Annahme, dass alle Elementarereignisse $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Welches Modell benutzen wir hier?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
A &= \{(0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0)\},\\
B &= \{(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0),\\
&\qquad (0,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,0,1),\ (1,0,1,0),\ (1,1,0,0)\},\\
C &= \{(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1),\\
&\qquad (1,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0),\ (0,1,0,1),\ (0,0,1,1)\}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: C lässt sich äquivalent formulieren als "Mindestens zwei Signale werden falsch übertragen", und damit ist die Darstellung von C als Menge völlig symmetrisch zu der von B — man muss nur überall 0 und 1 vertauschen.

(b) $B \cap C$: "Genau zwei Signale werden korrekt übertragen."

$A \cup B$: "Mindestens zwei Signale werden korrekt übertragen" (beachten Sie, dass $A \subseteq B$).

A^c: "Entweder werden keine oder mindestens zwei Signale falsch übertragen."
Alternative Formulierung: "Alle oder höchstens zwei Signale werden korrekt übertragen."
Alternative Formulierung: "0 oder 1 oder 2 oder 4 Signale werden korrekt übertragen."
Alternative Formulierung: "0 oder 2 oder 3 oder 4 Signale werden falsch übertragen."

C^c: "Mindestens drei Signale werden korrekt übertragen."
Alternative Formulierung: "3 oder 4 Signale werden korrekt übertragen."

$A^c \cap C^c$: "Alle vier Signale werden korrekt übertragen."

(c) Ω hat $2^4 = 16$ Elemente. Da alle Elementarereignisse (x_1, x_2, x_3, x_4) gleich wahrscheinlich sein sollen und sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren müssen, haben alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$. Um diese Aufgabe rigoros lösen zu können, müssen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definieren. Weil für jedes $\omega \in \Omega$ die Menge $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ sein soll (damit sie eine Wahrscheinlichkeit bekommen kann) und weil Ω endlich ist, muss $\mathcal{F}$ alle Teilmengen von Ω enthalten, d.h. $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Also wählen wir ein Laplace-Modell.

- Der Grundraum $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\}$ ist hier schon in der Angabe gegeben.
- Die σ-Algebra $\mathcal{F} = 2^\Omega$ kann hier als Potenzmenge von Ω gewählt werden.
- Das Wahrschienlichkeitsmass muss dann als Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1], D \mapsto \mathbb{P}[D] := \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|D|}{16}$$

definiert werden.

Die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C kann und muss man somit bestimmen, indem man jeweils zählt, wieviele Elemente die Ereignisse haben. Also ist

$$\mathbb{P}[A] = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}[B] = \frac{11}{16} \text{ und } \mathbb{P}[C] = \frac{11}{16}.$$

Aufgabe 1-4. Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine 6 erscheint. An diesem Punkt wird das Experiment beendet. Was ist der Grundraum dieses Experiments? Sei E_n das Ereignis, dass n Mal gewürfelt werden muss, bis das Experiment gestoppt wird. Welche Punkte des Grundraums sind in E_n enthalten? Wie lässt sich das Ereignis $(\bigcup_{n=1}^\infty E_n)^c$ in Worten beschreiben?

Lösung: Das Experiment wird entweder nach endlich vielen Versuchen abgebrochen (nämlich wenn eine 6 gewürfelt wird) oder man würfelt unendlich lange. Also definieren wir

$$\begin{aligned} E_n &\coloneqq \big\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, 6) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, 1 \le i \le n-1\big\}, \\ E_\infty &\coloneqq \big\{1, \dots, 5\big\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, \forall i \ge 1\big\}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Grundraum als

$$\Omega \coloneqq \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) \cup E_\infty$$

darstellen. Beachten Sie, dass $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ äquivalente Notationen sind und deshalb dieselbe Menge bezeichnen (insbesondere ist E_∞ in der Vereinigung $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ nicht enthalten). Also stellt

$$\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c = E_\infty$$

das Ereignis "Es wird nie eine 6 gewürfelt" dar.