

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 2

MC 2-1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? (Genau eine Antwort ist richtig.)

- (a) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.
- (b) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.
- (c) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.
- (d) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer.

MC 2-2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(B) = 0.8$. Welche der folgenden Aussagen gilt immer? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

- (a) $\mathbb{P}[A \cap B] = 0.5$.
- (b) $\mathbb{P}[A \cap B] \leq 0.5$.
- (c) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq 0.3$.
- (d) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq 0.5$.

MC 2-3. Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. In welchen Fällen gilt

$$\mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]?$$

(Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

- (a) Immer.
- (b) Wenn $B \subseteq A$.
- (c) Wenn $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$.
- (d) Wenn $A = \Omega$.

Aufgabe 2-4. Seien A und B zwei Ereignisse mit

$$P[A^c] = \frac{1}{2}, \quad P[B^c] = \frac{1}{2}, \quad P[A^c \cap B^c] = p.$$

- (a) Bestimmen Sie als Funktion von p die Wahrscheinlichkeiten $P[A \cap B]$, $P[A \cap B^c]$ und $P[A^c \cap B]$. In welchem Bereich darf p liegen?
- (b) Bestimmen Sie als Funktion von p die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens i der beiden Ereignisse A und B eintreten, wobei $i \in \{0, 1, 2\}$.

Aufgabe 2-5. Wir haben eine Klasse von $n \in \mathbb{N}$ Schülern, deren Geburtstage zufällig über das Jahr verteilt sind. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass ein Jahr 365 Tage hat und dass ein Geburtstag mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf jeden der 365 Tage fallen kann (dies entspricht in Wirklichkeit nicht der Wahrheit). Nehmen Sie ausserdem zur Vereinfachung an, dass die Geburtstage der Schüler in der Klasse unabhängig voneinander sind, d.h. es gibt zum Beispiel keine Zwillinge. (Für den Moment können Sie “Unabhängigkeit” intuitiv verstehen oder so, wie Sie es am Gymnasium gelernt haben. Genauer ist die Annahme, dass alle Verteilungen der n Schülergeburtstage auf die 365 Tage mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten.) Schliesslich nehmen Sie auch zur Vereinfachung an, dass $1 < n < 365$ ist.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es (mindestens) einen Schüler gibt, dessen Geburtstag heute ist.
- (b) Alice und Bob sind zwei Schüler aus dieser Klasse. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beide heute Geburtstag haben?
- (c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob am selben Tag Geburtstag haben?
- (d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben?
- (e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) zwei Schüler heute Geburtstag haben?