Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 2 - Lösungen

MC 2-1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.

(b) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.

(c) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.

(d) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer.

Lösung: (d) ist wahr. Zum Beispiel nehmen wir $A = B$ mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$. Dann gilt $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] = 0.5$ und $\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] = 0.5 \times 0.5 = 0.25$. Dies widerlegt (a) und (c). Indem wir A, B mit $\mathbb{P}[A] > 0$ und $\mathbb{P}[B] > 0$ disjunkt wählen, widerlegen wir (b).

MC 2-2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(B) = 0.8$. Welche der folgenden Aussagen gilt immer? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\mathbb{P}[A \cap B] = 0.5$.

(b) $\mathbb{P}[A \cap B] \leq 0.5$.

(c) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq 0.3$.

(d) $\mathbb{P}[A \cap B] \geq 0.5$.

Lösung: (b) und (c) gilt. Wir haben $A \cap B \subseteq A$, was $\mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A] = 0.5$ ergibt. Weiterhin gilt $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cup B] = 0.5 + 0.8 - \mathbb{P}[A \cup B] \geq 0.5 + 0.8 - 1 = 0.3$. (a) und (d) sind im Allgemeinen nicht wahr, was durch Gegenbeispiele verifiziert werden kann.

MC 2-3. Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. In welchen Fällen gilt

$$\mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]?$$

(Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) Immer.

(b) Wenn $B \subseteq A$.

(c) Wenn $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$.

(d) Wenn $A = \Omega$.

Lösung: (b) und (d) sind korrekt. Wenn $B \subseteq A$, dann gilt $A = (A \setminus B) \cup B$ (disjunkte Vereinigung), was $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \setminus B] + \mathbb{P}[B]$ ergibt. Dies entspricht (b). (d) ist ein Spezialfall von (b). (a) und (c) sind im Allgemeinen nicht wahr.

Aufgabe 2-4. Seien A und B zwei Ereignisse mit

$$P[A^c] = \frac{1}{2}, \quad P[B^c] = \frac{1}{2}, \quad P[A^c \cap B^c] = p.$$

(a) Bestimmen Sie als Funktion von p die Wahrscheinlichkeiten $P[A \cap B]$, $P[A \cap B^c]$ und $P[A^c \cap B]$. In welchem Bereich darf p liegen?

(b) Bestimmen Sie als Funktion von p die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens i der beiden Ereignisse A und B eintreten, wobei $i \in \{0, 1, 2\}$.

Lösung:

(a) Da

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

bekommt man mit Hilfe der Formel (1.2.14) aus dem Skript

$$\begin{aligned} P[A \cap B] &= P[A] + P[B] - P[A \cup B] \\ &= \big(1 - P[A^c]\big) + \big(1 - P[B^c]\big) - \big(1 - P[A^c \cap B^c]\big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (1 - p) \\ &= p. \end{aligned}$$

Da $A \cap B^c$ und $A \cap B$ disjunkt sind mit $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$, erhalten wir

$$P[A \cap B^c] = P[A] - P[A \cap B] = \frac{1}{2} - p.$$

Ähnlich bekommt man

$$P[A^c \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{2} - p.$$

Da alle Wahrscheinlichkeiten in $[0, 1]$ liegen müssen, muss p im Bereich $[0, 1/2]$ liegen.

(b) Wir definieren das Ereignis

$$C_i := \text{“höchstens } i \text{ der beiden Ereignisse } A \text{ und } B \text{ treten ein.”}$$

für alle $i \in \{0, 1, 2\}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P[C_0] &= P[A^c \cap B^c] = p, \\ P[C_1] &= P[C_0] + P[A \cup B] - P[A \cap B] \\ &= P[C_0] + 1 - P[A^c \cap B^c] - P[A \cap B] \\ &= p + 1 - p - p \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

und

$$P[C_2] = P[C_1] + P[A \cap B] = 1 - p + p = 1.$$

Aufgabe 2-5. Wir haben eine Klasse von $n \in \mathbb{N}$ Schülern, deren Geburtstage zufällig über das Jahr verteilt sind. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass ein Jahr 365 Tage hat und dass ein Geburtstag mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf jeden der 365 Tage fallen kann (dies entspricht in Wirklichkeit nicht der Wahrheit). Nehmen Sie ausserdem zur Vereinfachung an, dass die Geburtstage der Schüler in der Klasse unabhängig voneinander sind, d.h. es gibt zum Beispiel keine Zwillinge. (Für den Moment können Sie "Unabhängigkeit" intuitiv verstehen oder so, wie Sie es am Gymnasium gelernt haben. Genauer ist die Annahme, dass alle Verteilungen der n Schülergeburtstage auf die 365 Tage mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten.) Schliesslich nehmen Sie auch zur Vereinfachung an, dass $1 < n < 365$ ist.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es (mindestens) einen Schüler gibt, dessen Geburtstag heute ist.

(b) Alice und Bob sind zwei Schüler aus dieser Klasse. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beide heute Geburtstag haben?

(c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob am selben Tag Geburtstag haben?

(d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben?

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass (mindestens) zwei Schüler heute Geburtstag haben?

Lösung:

(a) Wir haben

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\text{“Es gibt einen Schüler, dessen Geburtstag heute ist.”}]\\ &\quad = 1 - \mathbb{P}[\text{“Niemand hat heute Geburtstag.”}]\\ &\quad = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n.\end{aligned}$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass beide heute Geburtstag haben, beträgt

$$\mathbb{P}[\text{“Alice und Bob haben heute Geburtstag.”}] = \frac{1 \times 1 \times 365^{n-2}}{365^n} = \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} \approx 7.506 \times 10^{-6}.$$

(c) $\mathbb{P}[\text{“Alice und Bob haben am selben Tag Geburtstag.”}] = \frac{365}{365} \times \frac{1}{365} = \frac{1}{365} \approx 0.0027.$

(d)

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\text{“Zwei Schüler haben am selben Tag Geburtstag.”}]\\ &\quad = 1 - \mathbb{P}[\text{“Alle Schüler haben paarweise verschiedene Geburtstage.”}]\\ &\quad = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \ldots \times \frac{365-n+1}{365}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Dies ist ein bekanntes Problem, das der gewöhnlichen Intuition widerspricht; siehe Wikipedia. Schon bei $n = 23$ beträgt die Wahrscheinlichkeit mehr als $1/2$ (50%).

(e) Wir haben

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\text{“Mindestens zwei Schüler haben heute Geburtstag.”}] \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}[\text{“Niemand hat heute Geburtstag.”}] - \mathbb{P}[\text{“Genau ein Schüler hat heute Geburtstag.”}] \\
&\quad = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n - \binom{n}{1} \times \frac{1}{365} \times \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1} \\
&\quad = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n - \frac{n \times 364^{n-1}}{365^n}.
\end{aligned}$$

Alternativ, aber schlechter berechenbar ist

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\text{“Mindestens zwei Schüler haben heute Geburtstag.”}] \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}[\text{“Genau } k \text{ Schüler haben heute Geburtstag.”}] \\
&\quad = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{365}\right)^k \left(\frac{365}{365}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für $n = 23$ beträgt die Wahrscheinlichkeit weniger als 0.002 (0.2%).