

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 3

MC 3-1. Sei

$$f_X(x) := \mathbf{1}_{\{x \in [0,2]\}} \frac{3}{8} x^2 = \begin{cases} \frac{3}{8} x^2, & x \in [0, 2], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Dichtefunktion. Was ist die entsprechende Verteilungsfunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $F_X(a) = \frac{a^3}{8}, a \in \mathbb{R}.$

(b) $F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ \frac{6a}{8}, & a \in (0, 2), \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$

(c) $F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ \frac{a^3}{8}, & a \in (0, 2), \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$

(d) Keines der oben genannten.

MC 3-2. Sei

$$f_X(x) := \mathbf{1}_{\{x \in [0,1]\}} \left(cx + \frac{1}{4} \right) = \begin{cases} cx + \frac{1}{4}, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche Werte von c ist f_X eine Dichtefunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) Nur für $c = \frac{3}{2}.$

(b) Für jedes $c \geq 0$, aber nicht für $c < 0.$

(c) Nur für $c = \frac{1}{4}.$

(d) Für jedes $c \in \mathbb{R}.$

MC 3-3. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und Dichte f_X . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\forall a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X \leq a] = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx.$

(b) $\forall a \in \mathbb{R} : 1 - F_X(a) = \int_a^{\infty} f_X(x) dx.$

(c) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b : \mathbb{P}[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx.$

(d) $\forall a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X = a] = 0.$

Aufgabe 3-4. Wir haben zwei Würfel. Einer ist gewöhnlich mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und einer ist speziell, weil die 6 durch eine 7 ersetzt wurde (also hat er die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 7). Wir werfen eine Münze, um zu entscheiden, welcher Würfel geworfen wird. Wenn das Werfen der Münze Kopf ergibt, wird der gewöhnliche Würfel geworfen; andernfalls wird der spezielle Würfel geworfen.

- (a) Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unter Verwendung eines geeigneten Laplace-Modells.
- (b) Definieren Sie Zufallsvariablen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so dass X und Y die Ergebnisse des Münzwurfs und des Würfelwurfs darstellen.
- (c) Wieviele Mengen enthält \mathcal{F} ?
- (d) Geben Sie Beispiele für Ereignisse $E_1, E_2, E_3, E_4 \in \mathcal{F}$ an, so dass $\mathbb{P}[E_i] \neq \mathbb{P}[E_j]$, $\forall i \neq j$.
- (e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Würfeln eine gerade Zahl ergibt?
- (f) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[X = x, Y = y] \neq \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y]$ für einige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Das bedeutet, dass die Zufallsvariablen X und Y nicht unabhängig sind; siehe später.)

Aufgabe 3-5. Eine Münze wird geworfen und ein Würfel wird gewürfelt.

- (a) Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unter Verwendung eines Laplace-Modells.
- (b) Definieren Sie Zufallsvariablen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, so dass X und Y das Ergebnis des Münzwurfs bzw. des Würfelwurfs repräsentieren.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[X = x, Y = y] = \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Dies bedeutet, dass die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind; siehe später.)