Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 3 - Lösungen

MC 3-1. Sei

$$f_X(x) := \mathbf{1}_{\{x\in[0,2]\}}\frac{3}{8}x^2 = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0,2], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

eine Dichtefunktion. Was ist die entsprechende Verteilungsfunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $F_X(a) = \frac{a^3}{8}$, $a \in \mathbb{R}$.

(b) $F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ \frac{6a}{8}, & a \in (0,2), \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$

(c) $F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ \frac{a^3}{8}, & a \in (0,2), \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$

(d) Keines der oben genannten.

Lösung: (c) ist wahr. Wir haben

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ \int_0^a \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{x^3}{8}\Big|_{x=0}^{a} = \frac{a^3}{8}, & a \in (0,2), \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$$

MC 3-2. Sei

$$f_X(x) := \mathbf{1}_{\{x\in[0,1]\}}\left(cx + \frac{1}{4}\right) = \begin{cases} cx + \frac{1}{4}, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Für welche Werte von c ist f_X eine Dichtefunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) Nur für $c = \frac{3}{2}$.

(b) Für jedes $c \geq 0$, aber nicht für $c < 0$.

(c) Nur für $c = \frac{1}{4}$.

(d) Für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Lösung: Es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. Wir haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 \Big(cx + \frac{1}{4}\Big)dx = \frac{c}{2} + \frac{1}{4}.$$

Dies ist genau dann gleich 1, wenn $c = \frac{3}{2}$ ist. Wir sehen auch, dass $f_X(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, für $c = \frac{3}{2}$ gilt; also ist (a) korrekt.

MC 3-3. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X und Dichte f_X. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\forall a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$.

(b) $\forall a \in \mathbb{R} : 1 - F_X(a) = \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx$.

(c) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b : \mathbb{P}[a < X \leq b] = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$.

(d) $\forall a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X = a] = 0$.

Lösung: Alle Optionen sind korrekt.

Aufgabe 3-4. Wir haben zwei Würfel. Einer ist gewöhnlich mit den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ und einer ist speziell, weil die 6 durch eine 7 ersetzt wurde (also hat er die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 7$). Wir werfen eine Münze, um zu entscheiden, welcher Würfel geworfen wird. Wenn das Werfen der Münze Kopf ergibt, wird der gewöhnliche Würfel geworfen; andernfalls wird der spezielle Würfel geworfen.

(a) Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unter Verwendung eines geeigneten Laplace-Modells.

(b) Definieren Sie Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass X und Y die Ergebnisse des Münzwurfs und des Würfelwurfs darstellen.

(c) Wieviele Mengen enthält $\mathcal{F}$?

(d) Geben Sie Beispiele für Ereignisse $E_1, E_2, E_3, E_4 \in \mathcal{F}$ an, so dass $\mathbb{P}[E_i] \neq \mathbb{P}[E_j],\ \forall i \neq j$.

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Würfeln eine gerade Zahl ergibt?

(f) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[X = x, Y = y] \neq \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y]$ für einige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Das bedeutet, dass die Zufallsvariablen X und Y nicht unabhängig sind; siehe später.)

Lösung:

(a) $\Omega := \{0, 1\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{12}$.

Alternativ könnte man auch definieren

$$\Omega := \big\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 7)\big\}.$$

(b) $X : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega) := \omega_1$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto Y(\omega) := \begin{cases} \omega_2, & \omega_2 \leq 5, \\ 6, & \omega_2 = 6 \text{ und } \omega_1 = 0, \\ 7, & \omega_2 = 6 \text{ und } \omega_1 = 1, \end{cases}$

wobei wir $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ schreiben. Eine elegante Schreibweise dafür ist $Y(\omega) := \omega_2 \mathbf{1}_{\{\omega_2 \leq 5\}} + (\omega_1 + \omega_2)\mathbf{1}_{\{\omega_2 > 5\}}$.

(c) $|\mathcal{F}| = 2^{12} = 4096$.

(d) Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, Beispiele zu wählen, z.B. $E_1 = \emptyset, E_2 = \{(0,1)\}, E_3 = \{(0,1),(0,3),(1,2)\}, E_4 = \Omega$ mit $\mathbb{P}[E_1] = 0$, $\mathbb{P}[E_2] = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}[E_3] = \frac{3}{12}$, $\mathbb{P}[E_4] = 1$.

(e) Wir können direkt zählen, dass $|\{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } Y = 2k\}| = 3 + 2 = 5$. Daher ist

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit } Y = 2k\}] = \frac{5}{12}.$$

(f) Es genügt, ein Gegenbeispiel für die Gleichung zu finden. Eine einfache Wahl ist $x = 0$ und $y = 7$. Zuerst berechnen wir die linke Seite als

$$\mathbb{P}[X = 0, Y = 7] = \frac{|\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0 \text{ und } Y(\omega) = 7\}|}{12} = 0.$$

Nun betrachten wir die rechte Seite. Wir beginnen mit der Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}] = \frac{|\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}|}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Analog erhalten wir

$$\mathbb{P}[Y = 7] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = 7\}] = \frac{|\{\omega \in : Y(\omega) = 7\}|}{12} = \frac{1}{12}.$$

Also können wir schlussfolgern, dass

$$\mathbb{P}[X = 0, Y = 7] = 0 \neq \frac{1}{24} = \mathbb{P}[X = 0]\mathbb{P}[Y = 7].$$

Aufgabe 3-5. Eine Münze wird geworfen und ein Würfel wird gewürfelt.

(a) Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ unter Verwendung eines Laplace-Modells.

(b) Definieren Sie Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, so dass X und Y das Ergebnis des Münzwurfs bzw. des Würfelwurfs repräsentieren.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[X = x, Y = y] = \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Dies bedeutet, dass die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind; siehe später.)

Lösung:

(c) $\Omega := \{0,1\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{12}$.

(b) $X : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega) := \omega_1$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto Y(\omega) := \omega_2$, wobei wir $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ schreiben.

(c) Zuerst berechnen wir die linke Seite als

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = x, Y = y] &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}] \\ &= \frac{|\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \text{ und } Y(\omega) = y\}|}{12},\end{aligned}$$

wobei der Zähler vereinfacht werden kann als

$$|\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \text{ und } Y(\omega) = y\}| = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Dies führt zu

$$\mathbb{P}[X = x, Y = y] = \begin{cases} \frac{1}{12}, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Nun betrachten wir die rechte Seite. Wir beginnen mit der Berechnung der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}] = \frac{|\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}|}{12},$$

wobei die im Zähler auftretende Menge ausgedrückt werden kann als

$$\big\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\big\} = \begin{cases} \big\{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (x, 4), (x, 5), (x, 6)\big\}, & x \in \{0, 1\}, \\ \emptyset, & x \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Also erhalten wir durch Zählen

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, & x \in \{0, 1\}, \\ 0, & x \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

Analog erhalten wir

$$\mathbb{P}[Y = y] = \begin{cases} \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, & y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ 0, & y \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{cases}$$

Da $(x, y) \in \Omega$ äquivalent ist zu $(x, y) \in \{0, 1\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, können wir schliessen, dass

$$\mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y] = \left.\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{6} = \frac{1}{12}, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}\right\} = \mathbb{P}[X = x, Y = y].$$