Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 4

MC 4-1. Seien A, B und C Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \cap B] > 0$ und $\mathbb{P}[C] > 0$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}[A|B] > \mathbb{P}[A]$ und $\mathbb{P}[A|C] > \mathbb{P}[A]$. Dann gilt: (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\mathbb{P}[A|B \cap C] > \mathbb{P}[A]$.

(b) $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C]$.

(c) $\mathbb{P}[B|A] > \mathbb{P}[B]$.

(d) Keines der oben genannten.

MC 4-2. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen, die Werte in $\{1, \ldots, 6\}$ annehmen und zwei unabhängige Würfe eines Würfels darstellen. Welche der folgenden Paare von Mengen sind unabhängig? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\{$“X ist ungerade”$\}$, $\{$“$X + Y$ ist gerade”$\}$.

(b) $\big\{X \in \{1, 3\}\big\}$, $\{X + Y = 5\}$.

(c) $\{X = 1\}$, $\{X + Y = 4\}$.

(d) $\{X = 1\}$, $\{X + Y = 13\}$.

Aufgabe 4-3. Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{a}{2}, & 0 \le a < 1, \\ \frac{2}{3}, & 1 \le a < 2, \\ \frac{a+1}{4}, & 2 \le a < 3, \\ 1, & 3 \le a. \end{cases}$$

(a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.

(b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}[X < 1]$, $\mathbb{P}[X = 2]$, $\mathbb{P}[X = 3]$, $\mathbb{P}[1 < X \le 2]$, $\mathbb{P}[1 \le X < 2]$ und $\mathbb{P}[X \ge 3/2]$.

(c) Besitzt X eine Dichtefunktion?

Aufgabe 4-4. (Simpson-Paradoxon). Wir interessieren uns für die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Studenten bei einer Eingangsprüfung für zwei Abteilungen einer Universität. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &\coloneqq \{\text{“Der Student ist ein Mann”}\}, \\ B &\coloneqq \{\text{“Der Student hat sich für Abteilung I beworben”}\}, \\ C &\coloneqq \{\text{“Der Student wurde akzeptiert”}\}. \end{aligned}$$

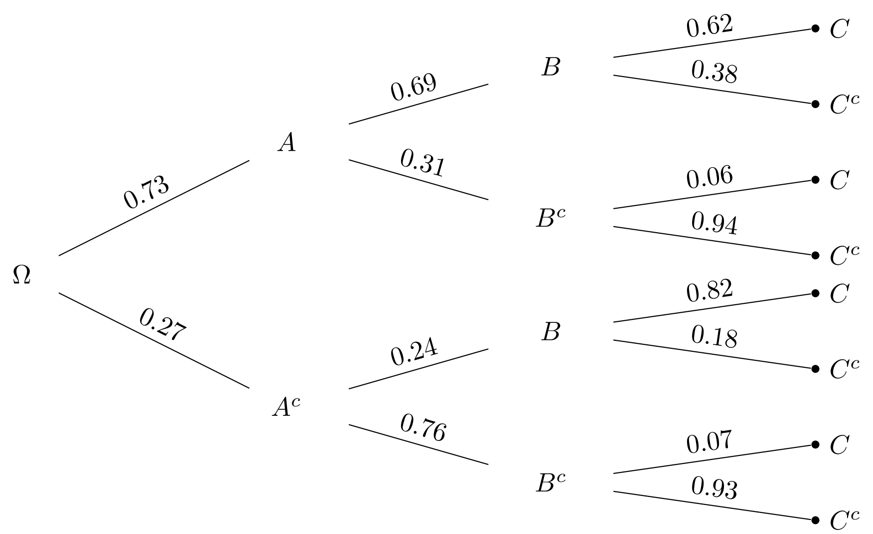
Also ist

$$\begin{aligned} A^c &= \{\text{“Der Student ist kein Mann”}\}, \\ B^c &= \{\text{“Der Student hat sich für Abteilung II beworben”}\}, \\ C^c &= \{\text{“Der Student wurde nicht akzeptiert”}\}. \end{aligned}$$

Wir kennen die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[A] = 0.73, \\ \mathbb{P}[B|A] = 0.69, \quad &\mathbb{P}[B|A^c] = 0.24, \\ \mathbb{P}[C|A\cap B] = 0.62, \quad &\mathbb{P}[C|A^c\cap B] = 0.82, \\ \mathbb{P}[C|A\cap B^c] = 0.06, \quad &\mathbb{P}[C|A^c\cap B^c] = 0.07. \end{aligned}$$

Graphisch sieht das wiefolgt aus:



(a) Formulieren Sie in Worten, was die obigen bedingten Wahrscheinlichkeiten aussagen. Denken Sie, dass Personen, die keine Männer sind, im Auswahlprozess benachteiligt sind? Warum oder warum nicht?

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}[C|A]$ und $\mathbb{P}[C|A^c]$, d.h. die Akzeptanzwahrscheinlichkeiten für Männer und für Personen, die keine Männer sind. Stimmt dies mit Ihrer Antwort in (a) überein? Können Sie erklären, was hier passiert?

Aufgabe 4-5. Wir haben zwei verschiedene Würfel; bei einem davon ist die 6 durch eine 7 ersetzt. Nun werfen wir zuerst eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ Kopf zeigt. Falls Kopf eintritt, so wählen wir den Würfel mit der 6, falls Zahl eintritt, so wählen wir den Würfel mit der 7. Anschliessend werfen wir den gewählten Würfel zweimal und berechnen die Summe Y der erhaltenen Augenzahlen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für “die Augensumme ist 10” und “die Augensumme ist 12” jeweils als Funktion von p.

(b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit für Kopf, wenn die Augensumme 10 bzw. 12 ist.

(c) Welche der Ereignisse “Münzwurf ergibt Kopf”, “die Augensumme ist 10” und “die Augensumme ist 12” sing unabhängig?