Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 4 - Lösungen

MC 4-1. Seien A, B und C Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \cap B] > 0$ und $\mathbb{P}[C] > 0$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}[A|B] > \mathbb{P}[A]$ und $\mathbb{P}[A|C] > \mathbb{P}[A]$. Dann gilt: (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\mathbb{P}[A|B \cap C] > \mathbb{P}[A]$.

(b) $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C]$.

(c) $\mathbb{P}[B|A] > \mathbb{P}[B]$.

(d) Keines der oben genannten.

Lösung: Antwort (c) ist korrekt. $\mathbb{P}[A \cap B] > 0$ impliziert $\mathbb{P}[A] > 0$ und $\mathbb{P}[B] > 0$, also

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A].$$

Dann

$$\mathbb{P}[A|B] > P[A] \implies \mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} > \frac{\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}[B].$$

Keine der anderen Optionen gilt im Allgemeinen.

MC 4-2. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen, die Werte in $\{1, \ldots, 6\}$ annehmen und zwei unabhängige Würfe eines Würfels darstellen. Welche der folgenden Paare von Mengen sind unabhängig? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\{$"X ist ungerade"$\}$, $\{$"$X + Y$ ist gerade"$\}$.

(b) $\big\{X \in \{1, 3\}\big\}$, $\{X + Y = 5\}$.

(c) $\{X = 1\}$, $\{X + Y = 4\}$.

(d) $\{X = 1\}$, $\{X + Y = 13\}$.

Lösung: (a) und (d) sind korrekt. Wir haben

$$\mathbb{P}[\text{"}X \text{ ist ungerade"}] = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\text{“}X+Y \text{ ist gerade”}] &= \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist gerade”}|\text{“}Y \text{ ist gerade”}]\mathbb{P}[\text{“}Y \text{ ist gerade”}] \\
&\quad + \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade”}|\text{“}Y \text{ ist ungerade”}]\mathbb{P}[\text{“}Y \text{ ist ungerade”}] \\
&= \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist gerade”}]\mathbb{P}[\text{“}Y \text{ ist gerade”}] \\
&\quad + \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade”}]\mathbb{P}[\text{“}Y \text{ ist ungerade”}] \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade, } X+Y \text{ ist gerade”}] &= \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade, } Y \text{ ist ungerade”}] \\
&= \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade”}]\mathbb{P}[\text{“}Y \text{ ist ungerade”}] \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass

$$\mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade, } X+Y \text{ ist gerade”}] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}[\text{“}X \text{ ist ungerade”}]\mathbb{P}[\text{“}X+Y \text{ ist gerade”}].$$

Die letzte Option ist trivialerweise wahr, da

$$\mathbb{P}[X=1,\, X+Y=13] = 0 = \mathbb{P}[X=1]\mathbb{P}[X+Y=13].$$

Durch ähnliche Berechnungen kann man überprüfen, dass die anderen Optionen nicht korrekt sind.

Aufgabe 4-3. Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{a}{2}, & 0 \le a < 1, \\ \frac{2}{3}, & 1 \le a < 2, \\ \frac{a+1}{4}, & 2 \le a < 3, \\ 1, & 3 \le a. \end{cases}$$

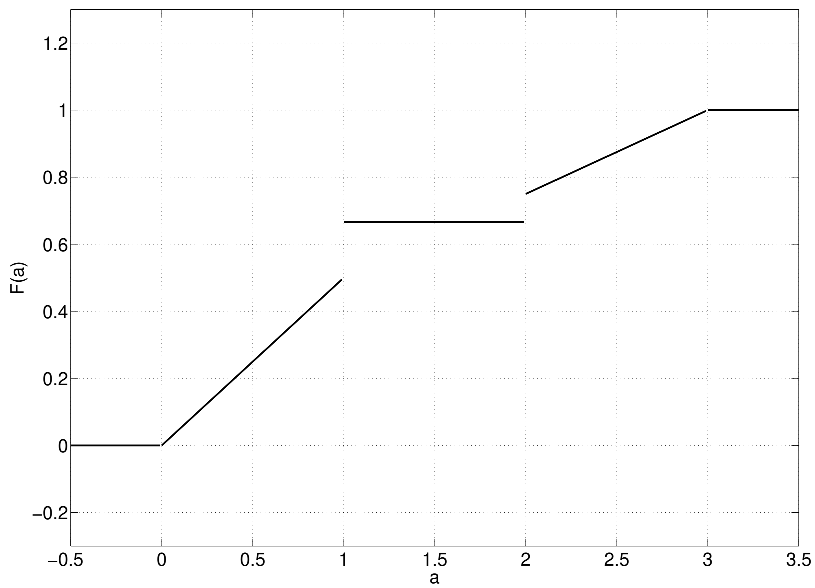
(a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.

(b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}[X < 1]$, $\mathbb{P}[X = 2]$, $\mathbb{P}[X = 3]$, $\mathbb{P}[1 < X \le 2]$, $\mathbb{P}[1 \le X < 2]$ und $\mathbb{P}[X \ge 3/2]$.

(c) Besitzt X eine Dichtefunktion?

Lösung:

(a) Der Graph von F verläuft folgendermassen:



(b) Wir haben:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X < 1] &= F(1-) = 1/2, \\
\mathbb{P}[X = 2] &= F(2) - F(2-) = 3/4 - 2/3 = 1/12, \\
\mathbb{P}[X = 3] &= 0 \text{ (da } F \text{ stetig im Punkt 3 ist)}, \\
\mathbb{P}[1 < X \leq 2] &= F(2) - F(1) = 3/4 - 2/3 = 1/12, \\
\mathbb{P}[1 \leq X < 2] &= F(2-) - F(1-) = 2/3 - 1/2 = 1/6, \\
\mathbb{P}[X \geq 3/2] &= 1 - F(1.5-) = 1 - 2/3 = 1/3.
\end{aligned}$$

(c) X kann keine Dichtefunktion besitzen, da die Verteilungsfunktion von X Sprünge hat, also nicht stetig ist.

Bemerkung: Beachten Sie, dass F an allen Punkten ausser endlich vielen Ableitungen hat. Da es jedoch nicht stetig ist, kann es keine Dichte haben.

Aufgabe 4-4. (Simpson-Paradoxon). Wir interessieren uns für die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Studenten bei einer Eingangsprüfung für zwei Abteilungen einer Universität. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned}
A &:= \{\text{“Der Student ist ein Mann”}\}, \\
B &:= \{\text{“Der Student hat sich für Abteilung I beworben”}\}, \\
C &:= \{\text{“Der Student wurde akzeptiert”}\}.
\end{aligned}$$

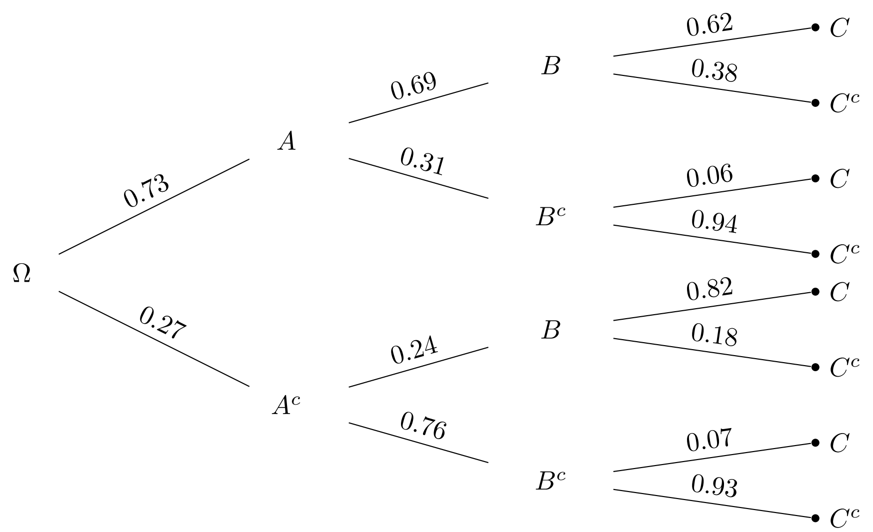
Also ist

$$\begin{aligned} A^c &= \{\text{“Der Student ist kein Mann”}\}, \\ B^c &= \{\text{“Der Student hat sich für Abteilung II beworben”}\}, \\ C^c &= \{\text{“Der Student wurde nicht akzeptiert”}\}. \end{aligned}$$

Wir kennen die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[A] = 0.73, \\ \mathbb{P}[B|A] = 0.69, &\quad \mathbb{P}[B|A^c] = 0.24, \\ \mathbb{P}[C|A \cap B] = 0.62, &\quad \mathbb{P}[C|A^c \cap B] = 0.82, \\ \mathbb{P}[C|A \cap B^c] = 0.06, &\quad \mathbb{P}[C|A^c \cap B^c] = 0.07. \end{aligned}$$

Graphisch sieht das wiefolgt aus:



(a) Formulieren Sie in Worten, was die obigen bedingten Wahrscheinlichkeiten aussagen. Denken Sie, dass Personen, die keine Männer sind, im Auswahlprozess benachteiligt sind? Warum oder warum nicht?

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}[C|A]$ und $\mathbb{P}[C|A^c]$, d.h. die Akzeptanzwahrscheinlichkeiten für Männer und für Personen, die keine Männer sind. Stimmt dies mit Ihrer Antwort in (a) überein? Können Sie erklären, was hier passiert?

Lösung:

(a) Die Interpretation lautet wie folgt:

- $\mathbb{P}[B|A]$ und $\mathbb{P}[B|A^c]$ sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Mann bzw. eine Person, die kein Mann ist, Abteilung I wählt.
- $\mathbb{P}[C|A \cap B^c]$ und $\mathbb{P}[C|A^c \cap B^c]$ repräsentieren die Zulassungsrate für Männer und Personen, die keine Männer sind, an Abteilung II.
- Schliesslich repräsentieren $\mathbb{P}[C|A \cap B^c]$ und $\mathbb{P}[C|A^c \cap B^c]$ die Zulassungsrate für Männer

und Personen, die keine Männer sind, an Abteilung II.

Wir können sehen, dass

$$\mathbb{P}[C \mid B \cap A^c] > \mathbb{P}[C \mid B \cap A]$$

und

$$\mathbb{P}[C \mid B^c \cap A^c] > \mathbb{P}[C \mid B^c \cap A].$$

Dies bedeutet, dass in beiden Abteilungen die Akzeptanzrate für Personen, die keine Männer sind, höher ist als die für Männer. Aufgrund dieser Information können wir nicht sagen, dass Personen, die keine Männer sind, benachteiligt sind.

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[C \mid A] &= \frac{\mathbb{P}[C \cap A]}{\mathbb{P}[A]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[C \cap A \cap B] + \mathbb{P}[C \cap A \cap B^c]}{\mathbb{P}[A]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[C \mid A \cap B]\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[C \mid A \cap B^c]\mathbb{P}[A \cap B^c]}{\mathbb{P}[A]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[C \mid A \cap B]\mathbb{P}[B \mid A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[C \mid A \cap B^c]\mathbb{P}[B^c \mid A]\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[A]} \\
&= 0.62 \times 0.69 + 0.06 \times 0.31 \\
&= 0.4464
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[C \mid A^c] &= \mathbb{P}[C \mid A^c \cap B]\mathbb{P}[B \mid A^c] + \mathbb{P}[C \mid A^c \cap B^c]\mathbb{P}[B^c \mid A^c] \\
&= 0.82 \times 0.24 + 0.07 \times 0.76 \\
&= 0.25.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Akzeptanzraten für Männer und für Personen, die keine Männer sind, betragen 0.45 bzw. 0.25. Diese Zahlen legen nun einen völlig anderen Schluss nahe — Personen, die keine Männer sind, scheinen wirklich benachteiligt zu sein.

Die Erklärung dieses Paradoxons lautet wie folgt: Die höhere Gesamtablehnungsrate für Personen, die keine Männer sind, beruht nicht auf dem Geschlecht, sondern darauf, dass ein grosser Anteil der Personen, die keine Männer sind, sich für die Abteilung mit einer hohen Ablehnungsrate bewirbt. (Warum das so ist, ist eine völlig andere Frage und kann auf der Grundlage der hier gegebenen Informationen nicht diskutiert werden.)

In der Tat können wir die Akzeptanzraten der beiden Abteilungen berechnen als

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[C \mid B] &= \frac{\mathbb{P}[C \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[C \cap B \cap A] + \mathbb{P}[C \cap B \cap A^c]}{\mathbb{P}[B \cap A] + \mathbb{P}[B \cap A^c]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[C \mid B \cap A]\mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[C \mid B \cap A^c]\mathbb{P}[B|A^c]\mathbb{P}[A^c]}{\mathbb{P}[B \mid A]\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \mid A^c]\mathbb{P}[A^c]} \\ &= \frac{0.62 \times 0.69 \times 0.73 + 0.82 \times 0.24 \times 0.27}{0.69 \times 0.73 + 0.24 \times 0.27} \\ &= 0.648.\end{aligned}$$

Ähnliche Berechnungen ergeben $\mathbb{P}[C \mid B^c] \approx 0.065$. Daher ergibt das obige Ergebnis jetzt Sinn, wenn wir realisieren, dass $\mathbb{P}[B^c|A^c] = 76\%$ der Personen, die keine Männer sind, sich für die hoch selektive Abteilung II bewerben, während $\mathbb{P}[B|A] = 69\%$ der Männer sich für die deutlich weniger selektive Abteilung I bewerben.

Im Allgemeinen zeigt das Simpson-Paradoxon, dass Korrelation und Kausalität weit voneinander abweichen können, wenn eine wichtige Variable (z.B. in diesem Fall die Abteilung) nicht berücksichtigt wird. In der Praxis weiss man oft nicht, ob wichtige Variablen fehlen. Weitere interessante Beispiele für dieses Paradoxon werden sehr gut unter diesem Link präsentiert.

Aufgabe 4-5. Wir haben zwei verschiedene Würfel; bei einem davon ist die 6 durch eine 7 ersetzt. Nun werfen wir zuerst eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ Kopf zeigt. Falls Kopf eintritt, so wählen wir den Würfel mit der 6, falls Zahl eintritt, so wählen wir den Würfel mit der 7. Anschliessend werfen wir den gewählten Würfel zweimal und berechnen die Summe Y der erhaltenen Augenzahlen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für "die Augensumme ist 10" und "die Augensumme ist 12" jeweils als Funktion von p.

(b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit für Kopf, wenn die Augensumme 10 bzw. 12 ist.

(c) Welche der Ereignisse "Münzwurf ergibt Kopf", "die Augensumme ist 10" und "die Augensumme ist 12" sing unabhängig?

Lösung: Sei X das Ergebnis des Münzwurfs, wobei wir $\{X = 0\}$="Münzwurf ergibt Kopf" und $\{X = 1\}$="Münzwurf ergibt Zahl" setzen.

(a) Für den normalen Würfel haben wir drei Ergebnisse der Würfe, die zu einer Augensumme von 10 führen — $(4, 6)$, $(5, 5)$ und $(6, 4)$. Für den veränderten Würfel haben wir ebenfalls drei Ergebnisse der Würfe, die zu einer Augensumme von 10 führen — $(3, 7)$, $(5, 5)$ und $(7, 3)$. Somit gilt

$$\mathbb{P}[Y = 10|X = 0] = \mathbb{P}[Y = 10|X = 1] = 3 \times \frac{1}{6^2} = \frac{1}{12}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y = 10] &= \mathbb{P}[Y = 10|X = 0] \cdot \mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[Y = 10|X = 1] \cdot \mathbb{P}[X = 1] \\ &= \frac{1}{12} \times p + \frac{1}{12} \times (1 - p) = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Für den normalen Würfel gibt es nur eine Möglichkeit, die Augensumme 12 zu erhalten — $(6,6)$. Dies ergibt

$$\mathbb{P}[Y=12|X=0]=\frac{1}{6^2}.$$

Für den veränderten Würfel gibt es zwei Möglichkeiten, die Augensumme 12 zu erhalten — $(5,7)$ und $(7,5)$. Dies ergibt

$$\mathbb{P}[Y=12\,|\,X=1]=2\times\frac{1}{6^2}.$$

Daher erhalten wir durch dieselben Berechnungen wie zuvor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y=12]&=\mathbb{P}[Y=12|X=0]\mathbb{P}[X=0]+\mathbb{P}[Y=12|X=1]\mathbb{P}[X=1]\\&=\frac{1}{6^2}\cdot p+\frac{2}{6^2}\cdot(1-p)=\frac{1}{36}(2-p).\end{aligned}$$

(b) Wir haben durch direkte Berechnungen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=0|Y=10]&=\frac{\mathbb{P}[X=0,\,Y=10]}{\mathbb{P}[Y=10]}=\frac{\mathbb{P}[Y=10|X=0]\mathbb{P}[X=0]}{\mathbb{P}[Y=10]}=\frac{\frac{3}{36}\times p}{\frac{3}{36}}=p,\\\mathbb{P}[X=0|Y=12]&=\frac{\mathbb{P}[X=0,\,Y=12]}{\mathbb{P}[Y=12]}=\frac{\mathbb{P}[Y=12|X=0]\mathbb{P}[X=0]}{\mathbb{P}[Y=12]}=\frac{\frac{1}{36}\times p}{\frac{1}{36}(2-p)}=\frac{p}{2-p}.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=0,\,Y=10]&=\mathbb{P}[X=0|Y=10]\mathbb{P}[Y=10]=p\times\frac{1}{12}=\mathbb{P}[X=0]\mathbb{P}[Y=10],\\\mathbb{P}[X=0,\,Y=12]&=\mathbb{P}[X=0|Y=12]\mathbb{P}[Y=12]=\frac{p}{2-p}\times\frac{1}{36}(2-p)=\frac{p}{36}\\&\qquad\neq p\times\frac{2-p}{36}=\mathbb{P}[X=0]\mathbb{P}[Y=12],\\\mathbb{P}[Y=10,\,Y=12]&=0\neq\frac{1}{12}\times\frac{2-p}{36}=\mathbb{P}[Y=10]\mathbb{P}[Y=12].\end{aligned}$$

Das zeigt, dass nur $\{X=0\}$="Münzwurf ergibt Kopf" und $\{Y=10\}$="die Augensumme ist 10" unabhängig sind.

Alternativ kann man auch berechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=0,\,Y=10]&=\mathbb{P}[Y=10|X=0]\mathbb{P}[X=0]=\frac{1}{12}\times p,\\\mathbb{P}[X=0,\,Y=12]&=\mathbb{P}[Y=12|X=0]\mathbb{P}[X=0]=\frac{1}{36}\times p.\end{aligned}$$