Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 5

MC 5-1. Sei

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{a}{2}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{a+1}{4}, & 1 \leq a < 3, \\ 1, & 3 \leq a. \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) F hat keine Dichte.

(b) F hat eine Dichte gegeben durch

$$f_{(b)}(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq a < 3, \\ 0, & 3 \leq a. \end{cases}$$

(c) F hat eine Dichte gegeben durch

$$f_{(c)}(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{2}{4}, & 1 \leq a < 3, \\ 1, & 3 \leq a. \end{cases}$$

(d) Wir können nicht entscheiden, ob F eine Dichte hat.

MC 5-2. Sei F eine Verteilungsfunktion und f die entsprechende Dichte. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $f \geq 0$, aber nicht notwendigerweise $F \geq 0$.

(b) f ist rechtsstetig.

(c) $f \leq 1$.

(d) F kann unstetig sein, aber nur an endlich vielen Punkten.

Aufgabe 5-3. Seien A, B und A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

(a) Zeigen Sie, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A und B^c unabhängig sind, was auch äquivalent zur Unabhängigkeit von A^c und B^c ist.

(b) Zeigen Sie: Falls für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ A and A_i paarweise unabhängig sind, so sind A und $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ unabhängig.

(c) Nehmen Sie an, dass $\mathbb{P}[A] = 1$ ist. Zeigen Sie, dass dann A and B für alle $B \in \mathcal{F}$ unabhängig sind.

Bemerkung: Versuchen Sie zu überlegen, ob die Ergebnisse intuitiv sind und was die Interpretation ist.

Aufgabe 5-4. Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabhängig? Spezifizieren Sie dazu einen geeigneren Wahschleinlichkeitsraum.

(a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A =$ "Sie haben einen König gezogen" und $B =$ "Sie haben eine Pik-Karte gezogen".

(b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Sie ziehen ein Paar" und $B =$ "Sie haben zwei Herzkarten gezogen". Nehmen Sie an, dass die Reihenfolge der gezogenen Karten eine Rolle spielt.

(c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Sie ziehen ein Paar" und $B =$ "Sie ziehen zwei Kreuz-Karten". Nehmen Sie an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

Aufgabe 5-5. Wir haben einen repräsentativen Studenten des Kurses Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, dessen Wissen durch eine Zufallsvariable X_1 mit werten in $\{0, 1\}$ mit Verteilung $\mathbb{P}[X_1 = 0] = 1 - \mathbb{P}[X_1 = 1] = 4/10$ dargestellt wird. Hier interpretieren wir $\{X_1 = 1\} =$ "Der Student lernt gut" und $\{X_1 = 0\} =$ "Der Student lernt nicht gut".

Weiter definieren wir durch X_2 mit werten in $\{0, 1\}$ die Zufallsvariable, die repräsentiert, ob der Student versucht, die Prüfung zu bestehen, wobei $\{X_2 = 0\} =$ "Der Student meldet sich nicht für die Prüfung an" und $\{X_2 = 1\} =$ "Der Student meldet sich für die Prüfung an". Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}[X_2 = 1 | X_1 = x_1] = 1 - \mathbb{P}[X_2 = 0 | X_1 = x_1] = \frac{2 + 3x_1}{5}, \qquad x_1 \in \{0, 1\}.$$

Schliesslich definieren wir als X_3 mit werten in $\{0, 1\}$ die Zufallsvariable, die repräsentiert, ob der Student die Prüfung tatsächlich besteht, wobei $\{X_3 = 0\} =$ "Der Student besteht die Prüfung nicht" und $\{X_3 = 1\} =$ "Der Student besteht die Prüfung". Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = x_2,\, X_1 = x_1] = \begin{cases} \frac{1+3x_1}{5}, & x_1 \in \{0, 1\},\ x_2 = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Beschreiben Sie in Worten die verschiedenen bedingten Wahrscheinlichkeiten in der Aufgabe, und spezifizieren Sie ihre Werte.

(b) Am Ende der Prüfungssitzung wissen wir, dass der Student die Prüfung nicht bestanden hat (d.h. entweder durchgefallen ist oder sich nicht einmal angemeldet hat). Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Student nicht gut gelernt hat? Das heisst, was ist $\mathbb{P}[X_1 = 0 | X_3 = 0]$?