Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 5 - Lösungen

MC 5-1. Sei

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{a}{2}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{a+1}{4}, & 1 \leq a < 3, \\ 1, & 3 \leq a. \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) F hat keine Dichte.

(b) F hat eine Dichte gegeben durch

$$f_{(b)}(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq a < 3, \\ 0, & 3 \leq a. \end{cases}$$

(c) F hat eine Dichte gegeben durch

$$f_{(c)}(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{2}{4}, & 1 \leq a < 3, \\ 1, & 3 \leq a. \end{cases}$$

(d) Wir können nicht entscheiden, ob F eine Dichte hat.

Lösung: Wir können die Ableitung berechnen

$$\frac{d}{da}F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 < a < 3, \\ 0, & 3 < a, \\ \text{existiert nicht}, & a \in \{0, 1, 3\}. \end{cases} \tag{1}$$

Daher ist $f_{(b)}$ ein Kandidat für eine Dichte. Man kann dann durch direkte Berechnungen überprüfen, dass $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{(b)}(x)dx$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt, und daher ist (b) korrekt.

Alternativ kann man bemerken, dass F Lipschitz-stetig ist, was impliziert, dass es auch absolutstetig ist. Daraus folgt dann, dass F eine Dichte hat, die durch die Ableitung von F gegeben ist.

Bemerkung: Beachten Sie, dass sich der Wert einer Dichte an endlich vielen Punkten ändern kann, ohne den Wert ihres Integrals zu ändern. Daher ist es kein Problem, dass die Ableitung in (1) an den Punkten $a = 0$, $a = 1$ und $a = 3$ nicht existiert.

Freiwillige technische Bemerkung: Sei f eine Dichte von F. Dann ist g auch eine Dichte von F genau dann, wenn "$f = g$ fast überall bezüglich dem Lebesgue-Mass" gilt. In einem solchen Fall gilt zwangsläufig $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} g(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$. Gilt zum Beispiel $f(x) = g(x)$ für alle ausser endlich vielen Punkten, so ist $f = g$ fast überall bezüglich dem Lebesgue-Mass.

MC 5-2. Sei F eine Verteilungsfunktion und f die entsprechende Dichte. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $f \geq 0$, aber nicht notwendigerweise $F \geq 0$.

(b) f ist rechtsstetig.

(c) $f \leq 1$.

(d) F kann unstetig sein, aber nur an endlich vielen Punkten.

Lösung: Keine der Antworten ist korrekt. (a) ist nicht wahr, da $F \geq 0$ immer gilt. (b) und (c) sind für F zwar wahr, aber nicht unbedingt für f. Schliesslich kann F nicht unstetig sein, da es eine Dichte besitzt.

Aufgabe 5-3. Seien A, B und A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

(a) Zeigen Sie, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A und B^c unabhängig sind, was auch äquivalent zur Unabhängigkeit von A^c und B^c ist.

(b) Zeigen Sie: Falls für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ A and A_i paarweise unabhängig sind, so sind A und $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ unabhängig.

(c) Nehmen Sie an, dass $\mathbb{P}[A] = 1$ ist. Zeigen Sie, dass dann A and B für alle $B \in \mathcal{F}$ unabhängig sind.

Bemerkung: Versuchen Sie zu überlegen, ob die Ergebnisse intuitiv sind und was die Interpretation ist.

Lösung:

(a) Es genügt zu zeugen, dass gilt

$$A, B \text{ sind unabhängig} \implies A, B^c \text{ sind unabhängig.} \tag{2}$$

Mit B^c statt B folgt dann nämlich wegen $(B^c)^c = B$ auch

$$A, B^c \text{ sind unabhängig} \implies A, B \text{ sind unabhängig,}$$

mit A und B vertauscht folgt dann

$$A, B \text{ sind unabhängig} \iff A^c, B \text{ sind unabhängig.}$$

Für (2) nehmen wir also

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$$

an und wollen zeigen, dass das

$$\mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B^c]$$

impliziert.

Aber aus $\Omega = B \uplus B^c$ folgt $A = A \cap \Omega = (A \cap B) \uplus (A \cap B^c)$ und damit $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap B^c]$, also $\mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B]$. Wegen $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] liefert das \mathbb{P}[A \cap B^c] = \mathbb{P}[A](1 - \mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B^c]$, und wir sinf fertig.

(b) Nach Annahme haben wir $\mathbb{P}[A \cap A_i] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Da die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, so sind es auch $A \cap A_i$. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big)\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A \cap A_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A_i] \\ &= \mathbb{P}[A]\sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right], \text{was zu beweisen war.}\end{aligned}$$

(c) Mit (a) können wir zeigen, dass es ausreicht, die Aussage für A^c zu zeigen, wobei $\mathbb{P}[A^c] = 0$. Für alle Ereignisse $B \in \mathcal{F}$ gilt $A^c \cap B \subseteq A^c$, und damit bekommen wir mit Hilfe der Monotonie $\mathbb{P}[A^c \cap B] = 0$. Folglich ist $\mathbb{P}[A^c \cap B] = \mathbb{P}[A^c]\mathbb{P}[B]$ erfüllt für jedes $B \in \mathcal{F}$. Aus der Unabhängigkeit von A^c und B folgt mit (a), dass A und B unabhängig sind.

Alternativ: Ist $\mathbb{P}[A] = 1$, so ist $\mathbb{P}[A^c] = 0$ und damit auch $\mathbb{P}[B \cap A^c] = 0$. Also ist wegen $\Omega = A \uplus A^c$ und $\mathbb{P}[A] = 1$ auch $\mathbb{P}[B \cap A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A]$.

Aufgabe 5-4. Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabhängig? Spezifizieren Sie dazu einen geeigneren Wahschleinlichkeitsraum.

(a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A =$ "Sie haben einen König gezogen" und $B =$ "Sie haben eine Pik-Karte gezogen".

(b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Sie ziehen ein Paar" und $B =$ "Sie haben zwei Herzkarten gezogen". Nehmen Sie an, dass die Reihenfolge der gezogenen Karten eine Rolle spielt.

(c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ "Sie ziehen ein Paar" und $B =$ "Sie ziehen zwei Kreuz-Karten". Nehmen Sie an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

Lösung: Wir betrachten hier nur Laplace-Modelle. Folglich ist die Eigenschaft

$$|A \cap B| = \frac{|A||B|}{|\Omega|}$$

äquivalent zu

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

Sei K die Menge der 52 Karten ($|K| = 52$).

(a) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = K$. Also ist $\mathcal{F} = 2^\Omega = 2^K$ und

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|K|}.$$

Zieht man nur eine Karte, dann gilt

- $|\Omega| = 52$, da das Blatt 52 Karten enthält,
- $|A| = 4$, da das Blatt 4 Könige enthält,
- $|B| = 13$, da das Blatt 13 Pik-Karten enthält, und
- $|A \cap B| = 1$, da es nur einen Pik-König gibt.

Es folgt

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 13}{52} = 1 = |A \cap B|.$$

Also sind A und B unabhängig.

(b) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = K^2 = K \times K$. Das bedeutet $\mathcal{F} = 2^\Omega = 2^{K^2}$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|K^2|}$. Dieses Modell reflektiert, dass die Reihenfolge der Karten eine Rolle spielt. Ferner gilt beim Ziehen von zwei Karten

- $|\Omega| = 52^2 = 2'704$,
- $|A| = 13 \times 4^2 = 208$, da das Paar aus allen der 13 verschiedenen Karten gebildet werden kann,
- $|B| = 13^2 = 169$, da es 13 Herzkarten gibt, und
- $|A \cap B| = 13 \times 1^2$, da man zweimal dieselbe Herz-Karte ziehen muss (von 13 möglichen).

Wir erhalten

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{208 \times 169}{2'704} = 13 = |A \cap B|.$$

Folglich sind A und B unabhängig.

(c) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{H \in 2^K : |H| = 2\}$. Dieses Modell reflektiert, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt. Wir haben:

- $|\Omega| = \binom{52}{2} = 1326$,
- $|A| = 13 \times \binom{4}{2} = 78$, da das Paar aus allen 13 Karten gebildet werden kann,
- $|B| = \binom{13}{2} = 78$, da es 13 verschiedene Kreuz-Karten gibt, und
- $|A \cap B| = 0$, da ohne Zurücklegen dieselbe Karte nicht gezogen werden kann.

Wir beobachten

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{78 \times 78}{1'326} \approx 4.6 \neq 0 = |A \cap B|.$$

Folglich sind A und B *nicht* unabhängig.

Aufgabe 5-5. Wir haben einen repräsentativen Studenten des Kurses Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, dessen Wissen durch eine Zufallsvariable X_1 mit werten in $\{0,1\}$ mit Verteilung $\mathbb{P}[X_1 = 0] = 1 - \mathbb{P}[X_1 =$

$1] = 4/10$ dargestellt wird. Hier interpretieren wir $\{X_1 = 1\}$ = "Der Student lernt gut" und $\{X_1 = 0\}$ = "Der Student lernt nicht gut".

Weiter definieren wir durch X_2 mit werten in $\{0, 1\}$ die Zufallsvariable, die repräsentiert, ob der Student versucht, die Prüfung zu bestehen, wobei $\{X_2 = 0\}$ = "Der Student meldet sich nicht für die Prüfung an" und $\{X_2 = 1\}$ = "Der Student meldet sich für die Prüfung an". Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}[X_2 = 1 | X_1 = x_1] = 1 - \mathbb{P}[X_2 = 0 | X_1 = x_1] = \frac{2 + 3x_1}{5}, \qquad x_1 \in \{0, 1\}.$$

Schliesslich definieren wir als X_3 mit werten in $\{0, 1\}$ die Zufallsvariable, die repräsentiert, ob der Student die Prüfung tatsächlich besteht, wobei $\{X_3 = 0\}$ = "Der Student besteht die Prüfung nicht" und $\{X_3 = 1\}$ = "Der Student besteht die Prüfung". Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = x_2, X_1 = x_1] = \begin{cases} \frac{1+3x_1}{5}, & x_1 \in \{0, 1\}, \ x_2 = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Beschreiben Sie in Worten die verschiedenen bedingten Wahrscheinlichkeiten in der Aufgabe, und spezifizieren Sie ihre Werte.

(b) Am Ende der Prüfungssitzung wissen wir, dass der Student die Prüfung nicht bestanden hat (d.h. entweder durchgefallen ist oder sich nicht einmal angemeldet hat). Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Student nicht gut gelernt hat? Das heisst, was ist $\mathbb{P}[X_1 = 0 | X_3 = 0]$?

Lösung:

(a) Die Interpretation und die Werte der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_1 = 0]$ und $\mathbb{P}[X_1 = 1]$ sind offensichtlich.

Der Wert $\mathbb{P}[X_2 = 1 | X_1 = 0] = 2/5$ repräsentiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Student, der lernt nicht gut, sich für die Prüfung anmeldet. Ebenso repräsentiert $\mathbb{P}[X_2 = 1 | X_1 = 1] = 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Student, der lernt gut, sich für die Prüfung anmeldet. Analog dazu repräsentieren $\mathbb{P}[X_2 = 0 | X_1 = 1] = 0$ und $\mathbb{P}[X_2 = 0 | X_1 = 0] = 3/5$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass ein Student, der lernt nicht gut, und ein Student, der lernt gut, sich nicht für die Prüfung anmelden.

$\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = 1, X_1 = 0] = 1/5$ und $\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = 1, X_1 = 1] = 4/5$ sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass ein Student, der nicht gut lernt und sich für die Prüfung anmeldet, und ein Student, der gut lernt und sich für die Prüfung anmeldet, die Prüfung besteht. Ebenso sind $\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = 0, X_1 = 0] = 0$ und $\mathbb{P}[X_3 = 1 | X_2 = 0, X_1 = 1] = 0$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass ein Student, der nicht gut lernt und sich nicht für die Prüfung anmeldet, und ein Student, der gut lernt und sich nicht für die Prüfung anmeldet, die Prüfung besteht. Analog dazu können wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X_3 = 0 | X_2 = 1, X_1 = 0]$, $\mathbb{P}[X_3 = 0 | X_2 = 1, X_1 = 1]$, $\mathbb{P}[X_3 = 0 | X_2 = 0, X_1 = 0]$ und $\mathbb{P}[X_3 = 0 | X_2 = 0, X_1 = 1]$ interpretieren.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 = 0 | X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_1 = 0,\, X_3 = 0]}{\mathbb{P}[X_3 = 0]} = \frac{\sum_{x_2=0}^{1} \mathbb{P}[X_1 = 0,\, X_2 = x_2,\, X_3 = 0]}{\sum_{x_1=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1} \mathbb{P}[X_1 = x_1,\, X_2 = x_2,\, X_3 = 0]}\\ &= \frac{\sum_{x_2=0}^{1} \mathbb{P}[X_3 = 0 | X_1 = 0,\, X_2 = x_2]\mathbb{P}[X_2 = x_2 | X_1 = 0]\mathbb{P}[X_1 = 0]}{\sum_{x_1=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1} \mathbb{P}[X_3 = 0 | X_1 = x_1,\, X_2 = x_2]\mathbb{P}[X_2 = x_2 | X_1 = x_1]\mathbb{P}[X_1 = x_1]}\\ &= \frac{1 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{10}}{1 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{10} + 0 + \frac{1}{5} \times 1 \times \frac{6}{10}}\\ &= \frac{46}{61} \approx 0.754.\end{aligned}$$