Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 6

MC 6-1. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und mit

$$\mathbb{P}[X = k] = \begin{cases} c/k!, & k \in \mathbb{N}_0,\ k \text{ gerade}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei wir der Einfachheit halber 0 als gerade Zahl verstehen. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist dies eine wohldefinierte Gewichtsfunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

Hinweis: Sie können die folgende Identität verwenden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\Bigg).$$

(a) Nie.

(b) Nur für $c = e^{-1}$.

(c) Für alle $c \geq 0$.

(d) Nur für $c = 2/(e + e^{-1})$.

MC 6-2. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{1, \dots, 10\}$ und $\mathbb{P}[X = k] = k - c$ für $k \in \{1, \dots, 10\}$. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist dies eine wohldefinierte Gewichtsfunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) Wenn $c = 5.4$.

(b) Nie.

(c) Wenn $c = 1$.

(d) Wenn $c = 0$.

MC 6-3. Seien A, B und C Ereignisse in $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) Falls A und B sowie A und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.

(b) Falls A und B sowie B und C unabhängig sind, so sind auch A und C unabhängig.

(c) Falls A und B und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.

(d) Falls A und A unabhängig sind, so ist $\mathbb{P}[A] = 1$ oder $\mathbb{P}[A] = 0$.

MC 6-4. Sei X eine Zufallsvariable, die Werte in der Menge $\{0, 1, 3\}$ annimmt mit $\mathbb{E}[X] = 2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\mathbb{P}[X = 0] \geq \frac{1}{3}$.

(b) $\mathbb{P}[X = 1] \geq \frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{P}[X = 0] \leq \frac{1}{6}$.

(d) $\mathbb{P}[X = 3] \geq \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6-5. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, welche die Anzahl der Benutzer beschreibt, die innerhalb einer Stunde den Server A besuchen. Wir nehmen an, dass $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$.

(a) Erinnern Sie sich an die Definition der Poisson-Verteilung und argumentieren Sie, warum die Poisson-Verteilung ein angemessenes probabilistisches Modell für die beschriebene Situation ist.

(b) Wir wissen, dass der Server abstürzt, wenn ihn mindestens 1000 Personen innerhalb einer Stunde besuchen. Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür als eine Funktion von $\lambda > 0$ auf.

(c) Sei Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, welche die Anzahl der Benutzer beschreibt, die innerhalb einer Stunde den Server B besuchen. Nehmen Sie an, dass $Y \sim \text{Poisson}(\gamma)$ für ein $\gamma > 0$ gilt und

$$\mathbb{P}[X = i,\, Y = k] = \mathbb{P}[X = i]\mathbb{P}[Y = k], \qquad i, k \in \mathbb{N}_0.$$

(Dies bedeutet, dass X und Y unabhängig sind.) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X + Y = k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen $Z := X + Y$?

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, die binomiale Formel $(a + b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$, für $a, b \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ zu verwenden.

(d) Berechnen Sie die Werte von $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathbb{E}[XY]$.

Aufgabe 6-6. Betrachten Sie eine Klasse von $n \in \mathbb{N}$ Schülern, deren Geburtsdaten durch Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, dargestellt werden. Die Daten werden durch Zahlen in der Form “*ttmm*” repräsentiert. Das bedeutet, dass

$$X_i(\omega) \in D := \{101, 201, \dots, 3012, 3112\},$$

wobei wir mögliche Nullen am Anfang weglassen und ein Standardjahr ohne Schalttag betrachten. (Ist zum Beispiel der Geburtstag des ersten Schülers am 3.11., so ist $X_1 = 311$.) Nehmen Sie an, dass die gemeinsame Verteilung der Schüler gegeben ist durch

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1,\, X_2 = x_2, \dots,\, X_n = x_n] = \frac{1}{365^n} \text{ für } (x_1, \dots, x_n) \in D^n.$$

Mit anderen Worten: alle Verteilungen der n Schülergeburtstage auf die 365 Tage treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein, und wir haben dieselbe Situation wie in Aufgabe 2-5. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, unabhängig sind.

Aufgabe 6-7. (Monty-Hall-Problem) Sie sind in einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Türen. Hinter einer Tür befindet sich ein Auto, hinter den anderen beiden Türen sind Ziegen. Sie wählen eine Tür aus, und der Gastgeber, der weiss, was sich hinter den Türen verbirgt, öffnet eine andere Tür, hinter der sich eine Ziege befindet. Er fragt Sie dann: “Möchten Sie bei Ihrer ursprünglich gewählten Tür bleiben oder zu einer anderen wechseln?”. Angenommen, Sie mögen Autos, aber keine Ziegen, was sollten Sie tun?

(a) Konstruieren Sie ein geeignetes Modell, mit dem Sie diese Frage mithilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten beantworten können.

(b) Versuchen Sie, eine alternative Lösung zu finden (die natürlich dieselbe Antwort liefern muss).