Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 6 - Lösungen

MC 6-1. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und mit

$$\mathbb{P}[X = k] = \begin{cases} c/k!, & k \in \mathbb{N}_0,\, k \text{ gerade}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei wir der Einfachheit halber 0 als gerade Zahl verstehen. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist dies eine wohldefinierte Gewichtsfunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

Hinweis: Sie können die folgende Identität verwenden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2}\bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\bigg).$$

(a) Nie.

(b) Nur für $c = e^{-1}$.

(c) Für alle $c \geq 0$.

(d) Nur für $c = 2/(e + e^{-1})$.

Lösung: (d) ist korrekt. Es muss gelten: $1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k]$. Wir haben, dass $k \in \mathbb{N}_0$ gerade ist genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $k = 2n$. Folglich ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{k!} \mathbf{1}_{\{k \text{ ist gerade}\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{(2n)!} = \frac{c}{2}\bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\bigg) = \frac{c}{2}\big(e + e^{-1}\big).$$

Dies ergibt $c = 2/(e + e^{-1})$. Es ist klar, dass auch $2/\big((e + e^{-1})k!\big) \geq 0$ für jedes $k \geq 0$ ist.

MC 6-2. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{1, \ldots, 10\}$ und $\mathbb{P}[X = k] = k - c$ für $k \in \{1, \ldots, 10\}$. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist dies eine wohldefinierte Gewichtsfunktion? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) Wenn $c = 5.4$.

(b) Nie.

(c) Wenn $c = 1$.

(d) Wenn $c = 0$.

Lösung: (b) ist korrekt. Wir haben $\sum_{k=1}^{10}(k-c) = \frac{10}{2}(1+10) - 10c = 55 - 10c$. Wir sehen, dass $55 - 10c = 1$ genau dann, wenn $c = 5.4$. Allerdings gilt $k - 5.4 < 0$ für jedes $k \in \{1, \ldots, 5\}$. Daher definiert die obige Formel niemals eine Gewichtsfunktion.

MC 6-3. Seien A, B und C Ereignisse in $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) Falls A und B sowie A und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.

(b) Falls A und B sowie B und C unabhängig sind, so sind auch A und C unabhängig.

(c) Falls A und B und C unabhängig sind, so sind auch A und $B \cap C$ unabhängig.

(d) Falls A und A unabhängig sind, so ist $\mathbb{P}[A] = 1$ oder $\mathbb{P}[A] = 0$.

Lösung: (c) und (d) gilt. Wir haben

$$\mathbb{P}[A \cap (B \cap C)] = \mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B \cap C].$$

Ausserdem kann $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A] = (\mathbb{P}[A])^2$ nur wahr sein, wenn $\mathbb{P}[A] = 1$ oder $\mathbb{P}[A] = 0$ ist. Keine der anderen Optionen gilt im Allgemeinen.

MC 6-4. Sei X eine Zufallsvariable, die Werte in der Menge $\{0, 1, 3\}$ annimmt mit $\mathbb{E}[X] = 2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\mathbb{P}[X = 0] \geq \frac{1}{3}$.

(b) $\mathbb{P}[X = 1] \geq \frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{P}[X = 0] \leq \frac{1}{6}$.

(d) $\mathbb{P}[X = 3] \geq \frac{1}{2}$.

Lösung:

- (a) gilt nicht, zum Beispiel wenn $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = 3] = \frac{1}{2}$.
- (b) gilt nicht, zum Beispiel wenn $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X = 3] = \frac{2}{3}$.
- (c) gilt nicht, zum Beispiel wenn $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X = 3] = \frac{2}{3}$.
- (d) gilt. Für jede Wahl von $\mathbb{P}$ gilt mit $p_i := \mathbb{P}[X = i]$ für $i = 0, 1, 3$, dass

$$2 = \mathbb{E}[X] = p_1 + 3p_3 = (1 - p_0 - p_3) + 3p_3 = 1 - p_0 + 2p_3.$$

Also ist $2p_3 = 1 + p_0 \geq 1$ und damit $\mathbb{P}[X = 3] = p_3 \geq 1/2$.

Aufgabe 6-5. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, welche die Anzahl der Benutzer beschreibt, die innerhalb einer Stunde den Server A besuchen. Wir nehmen an, dass $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$.

(a) Erinnern Sie sich an die Definition der Poisson-Verteilung und argumentieren Sie, warum die Poisson-Verteilung ein angemessenes probabilistisches Modell für die beschriebene Situation ist.

(b) Wir wissen, dass der Server abstürzt, wenn ihn mindestens 1000 Personen innerhalb einer Stunde besuchen. Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür als eine Funktion von $\lambda > 0$ auf.

(c) Sei Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, welche die Anzahl der Benutzer beschreibt, die innerhalb einer Stunde den Server B besuchen. Nehmen Sie an, dass $Y \sim \text{Poisson}(\gamma)$ für ein $\gamma > 0$ gilt und

$$\mathbb{P}[X = i,\, Y = k] = \mathbb{P}[X = i]\mathbb{P}[Y = k], \qquad i, k \in \mathbb{N}_0.$$

(Dies bedeutet, dass X und Y unabhängig sind.) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X + Y = k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen $Z := X + Y$?

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, die binomiale Formel $(a + b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i$, für $a, b \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ zu verwenden.

(d) Berechnen Sie die Werte von $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathbb{E}[XY]$.

Lösung:

(a) Die Poisson-Verteilung ist durch $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$, gegeben. Da die Poisson-Verteilung ein Grenzwert einer Summe unabhängiger binomialer Verteilungen ist, eignet sie sich zur Beschreibung der Anzahl seltener Ereignisse; siehe Vorlesung.

(b) Wir haben

$$\mathbb{P}[X \geq 1000] = \sum_{k=1000}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \sum_{k=1000}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(c) Nach Annahme gilt $\mathbb{P}[X = i,\, Y = k] = \mathbb{P}[X = i]\mathbb{P}[Y = k]$, und für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\{X + Y = k,\, Y = \ell\} = \{X = k - \ell,\, Y = \ell\}.$$

Also ist wegen

$$\{X + Y = k\} = \dot{\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0}} \{X + Y = k,\, Y = \ell\} = \dot{\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0}} \{X = k - \ell,\, Y = \ell\} = \dot{\bigcup_{\ell=0}^{k}} \{X = k - \ell,\, Y = \ell\}$$

$$\mathbb{P}[X + Y = k] = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}[X = k - \ell,\, Y = \ell] = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}[X = k - \ell]\mathbb{P}[Y = \ell] = \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell)!} e^{-\gamma} \frac{\gamma^\ell}{\ell!}$$

$$= e^{-(\lambda+\gamma)} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \lambda^{k-\ell} \gamma^\ell = e^{-(\lambda+\gamma)} \frac{1}{k!} (\gamma + \lambda)^k.$$

Wir schliessen daraus, dass $Z \sim \text{Poisson}(\lambda + \gamma)$.

(d) Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned} \tag{1}$$

Darüber hinaus ergibt die Verwendung der Formel (2.2.6) aus dem Skript

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \lambda + \gamma.$$

Alternativ folgt aus $Z \sim \text{Poisson}(\lambda + \gamma)$ auch $\mathbb{E}[Z] = \lambda + \gamma$ gemäss (1).

Schliesslich ergibt sich durch die Verwendung der Formel (2.2.15) aus dem Skript aufgrund der Unabhängigkeit

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \lambda\gamma.$$

Aufgabe 6-6. Betrachten Sie eine Klasse von $n \in \mathbb{N}$ Schülern, deren Geburtsdaten durch Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, dargestellt werden. Die Daten werden durch Zahlen in der Form "*ttmm*" repräsentiert. Das bedeutet, dass

$$X_i(\omega) \in D \coloneqq \{101, 201, \dots, 3012, 3112\},$$

wobei wir mögliche Nullen am Anfang weglassen und ein Standardjahr ohne Schalttag betrachten. (Ist zum Beispiel der Geburtstag des ersten Schülers am 3.11., so ist $X_1 = 311$.) Nehmen Sie an, dass die gemeinsame Verteilung der Schüler gegeben ist durch

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1,\, X_2 = x_2, \dots,\, X_n = x_n] = \frac{1}{365^n} \text{ für } (x_1, \dots, x_n) \in D^n.$$

Mit anderen Worten: alle Verteilungen der n Schülergeburtstage auf die 365 Tage treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein, und wir haben dieselbe Situation wie in Aufgabe 2-5. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, unabhängig sind.

Lösung: Nach Definition müssen wir zeigen, dass für alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ und $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in D$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{i_1} = x_{i_1}, \dots,\, X_{i_k} = x_{i_k}] = \mathbb{P}[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdots \mathbb{P}[X_{i_k} = x_{i_k}]. \tag{2}$$

Die linke Seite ist gleich $365^{n-k}/365^n = 1/365^k$. Nehmen wir $k = 1$ an, dann ergibt sich

$$\mathbb{P}[X_{i_1} = x_{i_1}] = \frac{1}{365}, \quad x_{i_1} \in D.$$

Durch Symmetrie folgern wir $\mathbb{P}[X_{i_j} = x_{i_j}] = 1/365$, $x_{i_j} \in D$, für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$. Wir schliessen also

$$\mathbb{P}[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdots \mathbb{P}[X_{i_k} = x_{i_k}] = \frac{1}{365} \times \dots \times \frac{1}{365} = \frac{1}{365^k},$$

was die Gleichung (2) zeigt.

Aufgabe 6-7. (Monty-Hall-Problem) Sie sind in einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Türen. Hinter einer Tür befindet sich ein Auto, hinter den anderen beiden Türen sind Ziegen. Sie wählen eine Tür aus, und der Gastgeber, der weiss, was sich hinter den Türen verbirgt, öffnet eine andere Tür, hinter der sich eine Ziege befindet. Er fragt Sie dann: "Möchten Sie bei Ihrer ursprünglich gewählten Tür bleiben oder zu einer anderen wechseln?". Angenommen, Sie mögen Autos, aber keine Ziegen, was sollten Sie tun?

(a) Konstruieren Sie ein geeignetes Modell, mit dem Sie diese Frage mithilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten beantworten können.

(b) Versuchen Sie, eine alternative Lösung zu finden (die natürlich dieselbe Antwort liefern muss).

Lösung:

(a) Wir nummerieren die Türen als $1, 2, 3$ auf eine Weise, dass unsere erste Wahl Tür 1 ist. Wir definieren B_i = "Das Auto ist hinter Tür i", mit $i \in \{1, 2, 3\}$, A_j = "Moderator öffnet Tür j", mit $j \in \{2, 3\}$. Sei $\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$. Dann $B_i = \{i\} \times \{2, 3\}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $A_2 = \{1, 3\} \times \{2\}$ und $A_3 = \{1, 2\} \times \{3\}$. Wir wählen die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- $\mathbb{P}[B_1] = \mathbb{P}[B_2] = \mathbb{P}[B_3] = \frac{1}{3}$, was bedeutet, dass das Auto zufällig platziert wird.
- $\mathbb{P}[A_2|B_1] = \mathbb{P}[A_3|B_1] = \frac{1}{2}$, was bedeutet, dass der Moderator zufällig eine Ziegentür wählt, wenn wir die Autotür wählen.
- $\mathbb{P}[A_2|B_2] = 0$ und $\mathbb{P}[A_3|B_2] = 1$, denn wenn das Auto hinter Tür 2 ist, so muss der Moderator Tür 3 wählen.
- $\mathbb{P}[A_2|B_3] = 1$ und $\mathbb{P}[A_3|B_3] = 0$.

Dann berechnen wir mit der Bayes-Formel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B_1|A_2] &= \frac{\mathbb{P}[A_2|B_1]\mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A_2|B_1]\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A_2|B_2]\mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[A_2|B_3]\mathbb{P}[B_3]} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B_1|A_3] &= \frac{\mathbb{P}[A_3|B_1]\mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A_3|B_1]\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A_3|B_2]\mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[A_3|B_3]\mathbb{P}[B_3]} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\mathbb{P}[B_1|A_2] = \mathbb{P}[B_1|A_3] = \mathbb{P}[B_1]$. Aber das gibt auch $\mathbb{P}[B_3|A_2] = 1 - \mathbb{P}[B_1|A_2] = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}[B_2|A_3] = 1 - \mathbb{P}[B_1|A_3] = \frac{2}{3}$. Sie sollten also die andere Tür wählen, nicht die anfänglich gewählte. Sie haben keine zusätzlichen Informationen über Tür 1 erhalten, aber Sie haben zusätzliche Informationen über die letzte Tür.

(b) Nehmen Sie $\Omega = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung. Für $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ ist ω_1 die Nummer der Tür mit dem Auto und ω_2 die in der ersten Runde gewählte Tür. Die Entscheidung besteht dann darin, ob wir in der zweiten Runde zu einer anderen Tür wechseln oder nicht. Ist $\omega_1 = \omega_2$, so verlieren wir beim Wechseln; aber ist $\omega_1 \neq \omega_2$, so gewinnen wir beim Wechseln, da eine Tür bereits geöffnet ist. Daher beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit für das Auto $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, wenn wir wechseln, aber nur $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, wenn wir nicht wechseln. Daher sollten wir unsere erste Wahl aufgeben und wechseln.