Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 7

MC 7-1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen wahr? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.

(b) Wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt $\mathrm{Var}[X-Y] = \mathrm{Var}[X] - \mathrm{Var}[Y]$.

(c) $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[-X]$.

(d) Die Gleichung $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ ist nur dann wahr, wenn X und Y unabhängig sind.

MC 7-2. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\mathbb{E}[X^2] = (\mathbb{E}[X])^2$.

(b) $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$.

(c) Wenn X zentriert ist (d.h. $\mathbb{E}[X] = 0$), dann ist $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2]$.

(d) $\mathrm{Var}[X] > 0$.

Aufgabe 7-3. Ein Nachrichtenkanal überträgt binäre Codewörter zu je 1024 Bits. Die einzelnen Bits werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ falsch übertragen. Ein Wort wird genau dann richtig decodiert, wenn es höchstens drei falsch übermittelte Bits enthält. Es bezeichne X die Anzahl falsch übertragener Bits in einem Codewort.

(a) Welche Verteilung besitzt X?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort richtig decodiert wird. Dazu ist eine passende Approximation der Verteilung von X zu verwenden.

(c) Eine Meldung von 10 Wörtern wird übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wort falsch decodiert wird.

Aufgabe 7-4.

(a) Konstruieren Sie einen diskrete Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und diskrete Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

  (i) $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[X] = \infty$,

  (ii) $\mathbb{E}[Y] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] = \infty$.

(b) Ist es möglich, auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine diskrete Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ so zu konstruieren, dass $\mathbb{E}[Z] = \infty$ und $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$?

Aufgabe 7-5. In einer Urne sind N weisse und M schwarze Kugeln. Es werden $n \leq N + M$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

(a) Wählen Sie ein geeignetes Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für diese Situation.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 7-6. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Für die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sollen folgende Bedingungen gelten:

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1/2, \quad \mathbb{P}[Y = 0] = 1/3 \text{ und } \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] = p.$$

(a) Welche Werte darf p annehmen und für welche Werte von p sind X und Y unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[XY]$ sowie die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 als Funktion von p. Wann gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$?

(c) Finden Sie ein Beispiel von Zufallsvariablen U und V so, dass $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]$ gilt, aber sind U und V nicht unabhängig.

Aufgabe 7-7. $k \in \mathbb{N}$ Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus $m \in \mathbb{N}$ Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

Führen Sie für jede Ente $n \leq m$ eine Zufallsvariable X_n ein, die angibt, ob die Ente getroffen wurde oder nicht. Es soll also gelten $\{X_n = 1\} = \{$“n-te Ente nicht getroffen”$\}$ und $\{X_n = 0\} = \{$“n-te Ente getroffen”$\}$.

(a) Welche Verteilung hat X_n für $n = 1, \ldots, m$?

(b) Wie gross ist die erwartete Anzahl unverletzter Enten?

(c) Sind die Ereignisse $\{X_n = 0\}$, $n = 1, \ldots, m$, unabhängig? Untersuchen Sie nur den Fall $k < m$.