Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 7 - Lösungen

MC 7-1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen wahr? (Genau eine Antwort ist richtig.)

(a) $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.

(b) Wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt $\mathrm{Var}[X-Y] = \mathrm{Var}[X] - \mathrm{Var}[Y]$.

(c) $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[-X]$.

(d) Die Gleichung $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ ist nur dann wahr, wenn X und Y unabhängig sind.

Lösung:

- (a) ist im Allgemeinen nicht wahr. Sie ist wahr in spezifischen Fällen, z.B. wenn X und Y unabhängig (oder unkorreliert) sind.
- (b) ist fast nie wahr. Sie ist wahr, wenn und nur wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbb{P}[Y = c] = 1$, und dann ist $\mathrm{Var}[Y] = 0$ and $\mathrm{Var}[X-Y] = \mathrm{Var}[X]$.
- (c) ist wahr, da
$$\mathrm{Var}[-X] = \mathbb{E}\big[(-X - \mathbb{E}[-X])^2\big] = \mathbb{E}\Big[\big(-(X - \mathbb{E}[X])\big)^2\Big] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathrm{Var}[X].$$
- (d) ist nicht wahr, siehe Aufgabe 7-7. (c).

MC 7-2. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Die Anzahl der möglichen richtigen Antworten kann zwischen 0 und 4 liegen.)

(a) $\mathbb{E}[X^2] = (\mathbb{E}[X])^2$.

(b) $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$.

(c) Wenn X zentriert ist (d.h. $\mathbb{E}[X] = 0$), dann ist $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2]$.

(d) $\mathrm{Var}[X] > 0$.

Lösung:

- (a) ist fast nie wahr. Tatsächlich ist sie wahr, wenn und nur wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathbb{P}[X = c] = 1$.
- (b) ist wahr, da $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq 0$ impliziert
$$0 \leq \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$
- (c) ist wahr, da $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - 0^2 = \mathbb{E}[X^2]$.

- (d) ist im Allgemeinen nicht wahr. Wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathbb{P}[X = c] = 1$, dann ist $\mathrm{Var}[X] = 0$. Tatsächlich ist dies der einzige Fall, in dem (d) nicht zutrifft.

Aufgabe 7-3. Ein Nachrichtenkanal überträgt binäre Codewörter zu je 1024 Bits. Die einzelnen Bits werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ falsch übertragen. Ein Wort wird genau dann richtig decodiert, wenn es höchstens drei falsch übermittelte Bits enthält. Es bezeichne X die Anzahl falsch übertragener Bits in einem Codewort.

(a) Welche Verteilung besitzt X?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort richtig decodiert wird. Dazu ist eine passende Approximation der Verteilung von X zu verwenden.

(c) Eine Meldung von 10 Wörtern wird übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wort falsch decodiert wird.

Lösung:

(a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 1024$ und $p = 10^{-3}$, d.h.

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{1024}{k} \times 0.001^k \times 0.999^{1024-k} \quad \text{für } k = 0, \dots, 1024.$$

(b) Da $n = 1024$ relativ gross und $p = 10^{-3}$ relativ klein ist, ist X approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = np = 1024 \times 0.001 = 1.024$, d.h.

$$\mathbb{P}[X = k] \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Diese Näherung hat den Vorteil, dass sie sich, besonders für grosses k, wesentlich leichter berechnen lässt als der exakte Wert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Codewort richtig decodiert wird, ist somit

$$\mathbb{P}[X \leq 3] = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}[X = k] \approx e^{-\lambda}\big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6}\big) \approx 0.97950487.$$

Zum Vergleich: exakt ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \leq 3] &= \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}[X = k] \\
&= \binom{1024}{0} \times 0.001^0 \times 0.999^{1024} + \binom{1024}{1} \times 0.001^1 \times 0.999^{1023} \\
&\quad + \binom{1024}{2} \times 0.001^2 \times 0.999^{1022} + \binom{1024}{3} \times 0.001^3 \times 0.999^{1021} \\
&= 0.999^{1021} \times \Big(1 \times 0.999^3 + 1024 \times 0.001 \times 0.999^2 + \frac{1024 \times 1023}{2} \times 0.001^2 \times 0.999 \\
&\quad + \frac{1024 \times 1023 \times 1022}{6} \times 0.001^3\Big) \\
&\approx 0.97956839.
\end{aligned}$$

(c) Die Anzahl Y falsch decodierter Wörter ist (mit der in Aufgabe (b) vorgenommenen Näherung) ungefähr Binomial$(10, 1 - 0.9795)$ verteilt. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\mathbb{P}[Y \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[Y = 0] \approx 1 - \binom{10}{0} \times 0.0205^0 \times 0.9795^{10} \approx 0.187.$$

Aufgabe 7-4.

(a) Konstruieren Sie einen diskrete Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und diskrete Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

(i) $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[X] = \infty$,

(ii) $\mathbb{E}[Y] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] = \infty$.

(b) Ist es möglich, auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine diskrete Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ so zu konstruieren, dass $\mathbb{E}[Z] = \infty$ und $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$?

Lösung:

(a) Als Beispiel können wir $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$, $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ mit $p(\omega) := 2^{-\omega}$ für alle $\omega \in \Omega$ wählen. $\mathbb{P}$ ist tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmass, da $\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} 2^{-\omega} = 1$ als Summe einer geometrischen Reihe.

(i) $X : \Omega \to E$, $\omega \mapsto X(\omega) := 2^\omega$, wobei $E := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. Somit ist $X(\omega) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$. Daher gilt $\mathbb{P}[X < \infty] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$. Weiterhin erhalten wir, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}[X = x] = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} 2^\omega 2^{-\omega} = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} 1 = \infty.$$

(ii) $Y : \Omega \to \tilde{E}$, $\omega \mapsto Y(\omega) := \left(\frac{3}{2}\right)^\omega$, wobei $\tilde{E} := \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \left(\frac{3}{2}\right)^\omega 2^{-\omega} = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \left(\frac{3}{4}\right)^\omega < \infty,$$

weil $\frac{3}{4} < 1$. Analog erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{\omega \in \Omega} Y^2(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^\omega 2^{-\omega} = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \left(\frac{9}{8}\right)^\omega = \infty,$$

da $\frac{9}{8} > 1$ ist.

Alternative Lösung: Wir könnten auch $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{F} := 2^\Omega$, $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ mit $p(\omega) := \frac{90}{\omega^4 \pi^2}$, $\omega \in \Omega$ wählen. $\mathbb{P}$ ist tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmass, da $\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \frac{90}{\omega^4 \pi^2} = 1$ als Summe einer superharmonischen Reihe.

(i) $X : \Omega \to E$, $\omega \mapsto X(\omega) := \omega^4$, wobei $E := \{n^4 : n \in \mathbb{N}\}$. Somit ist $X(\omega) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$. Daher gilt $\mathbb{P}[X < \infty] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$. Weiterhin erhalten wir

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \omega^4 \frac{90}{\omega^4 \pi^2} = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \frac{90}{\pi^2} = \infty.$$

(ii) $Y : \Omega \to \tilde{E},\ \omega \mapsto Y(\omega) := \omega^2$, wobei $\tilde{E} := \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} \omega^2 \frac{90}{\omega^4\pi^2} = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} \frac{90}{\omega^2\pi^2} < \infty.$$

Analog erhalten wir

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{\omega\in\Omega} Y^2(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} \left(\omega^2\right)^2 \frac{90}{\omega^4\pi^2} = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} \frac{90}{\pi^2} = \infty.$$

(b) Dies ist nicht möglich, da $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2$ gilt. Das folgt aus dem Cauchy-Schwartz Ungleichung, weil

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}[X])^2 &= \Big(\sum_{x\in\mathcal{W}_X} x p_X(x)\Big)^2 = \Big(\sum_{x\in\mathcal{W}_X} x\sqrt{p_X(x)}\sqrt{p_X(x)}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{x\in\mathcal{W}_X} x^2 p_X(x)\Big)\Big(\sum_{x\in\mathcal{W}_X} p_X(x)\Big) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{W}_X} x^2 p_X(x) = \mathbb{E}[X^2].\end{aligned} \tag{1}$$

Bemerkung: Formal sollten wir zuerst überprüfen, ob $\mathbb{E}[X]$ wohldefiniert ist. Dies kann erreicht werden, indem man X in (1) durch $|X|$ ersetzt, um $(\mathbb{E}|X|)^2 \leq \mathbb{E}[X^2] < \infty$ zu erhalten.

Aufgabe 7-5. In einer Urne sind N weisse und M schwarze Kugeln. Es werden $n \leq N+M$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

(a) Wählen Sie ein geeignetes Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für diese Situation.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung: Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

(a) Wir wählen das Laplace-Modell mit

$$\Omega = \{\text{alle Teilmengen der ingesamt } N+M \text{ Kugeln vom Umfang } n\},$$

weil wir uns nicht für die Reihenfolge der gezogenen Kugeln interessieren. Also ist $|\Omega| = \binom{N+M}{n}$.

(b) Für $0 \leq k \leq N,\ 0 \leq n-k \leq M$ gilt

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}},$$

denn man muss k aus den N weissen Kugeln erwischen und die restlichen $n-k$ Kügeln müssen aus den M schwarzen kommen. Für alle übrigen k ist $\mathbb{P}[X = k] = 0$.

(c) Wir nummerieren die weissen Kugeln von 1 bis N. Dann können wir X als Summe von Indikatorfunktionen schreiben, nämlich

$$X = X_1 + \cdots + X_N,$$

wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls die weisse Kugel Nr. } i \text{ gezogen wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1 \times \binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} = \frac{n}{M+N}.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{Nn}{M+N}.$$

Alternativ kann man auch die Summe $\sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+m}{n}}$ berechnen, aber das ist eher mühsam. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}[X = k] &= \frac{1}{\binom{M+N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \frac{M!}{(n-k)!(M+n-k)!} \\
&= \frac{1}{\binom{M+N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} N \frac{(N-1)!}{j!(N-1-j)!} \frac{M!}{(n-1-j)!(M+n-1-j)!} \\
&= \frac{1}{\binom{M+N}{n}} N \sum_{j=0}^{n-1} \binom{N-1}{j} \binom{M}{n-1-j} \frac{\binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N-1}{n-1}} \\
&= \frac{\binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} N \\
&= N \frac{n}{M+N} \\
&= \frac{Nn}{M+N}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7-6. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Für die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sollen folgende Bedingungen gelten:

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1/2, \quad \mathbb{P}[Y = 0] = 1/3 \;\text{ und }\; \mathbb{P}[X = 0, Y = 0] = p.$$

(a) Welche Werte darf p annehmen und für welche Werte von p sind X und Y unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[XY]$ sowie die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 als Funktion von p. Wann gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$?

(c) Finden Sie ein Beispiel von Zufallsvariablen U und V so, dass $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]$ gilt, aber sind U und V nicht unabhängig.

Lösung:

(a) Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X=0, Y=0] = p, \\
&\mathbb{P}[X=0, Y=1] = \mathbb{P}[X=0] - \mathbb{P}[X=0, Y=0] = 1/2 - p, \\
&\mathbb{P}[X=1, Y=0] = \mathbb{P}[Y=0] - \mathbb{P}[X=0, Y=0] = 1/3 - p, \\
&\mathbb{P}[X=1, Y=1] = 1 - \mathbb{P}[X=0, Y=0] - \mathbb{P}[X=0, Y=1] - \mathbb{P}[X=1, Y=0] = 1/6 + p.
\end{aligned}$$

Da die obigen Ausdrücke Wahrscheinlichkeiten sind, müssen ihre Werte alle zwischen 0 und 1 liegen. Folglich darf p nur Werte zwischen 0 und $1/3$ annehmen. Ist andererseits $p \in [0, 1/3]$, so sind $\sum_\omega \mathbb{P}[\{\omega\}] = 1$ und $\mathbb{P}[\{\omega\}] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt.

Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle $i, j = 0, 1$

$$\mathbb{P}[X=i, Y=j] = \mathbb{P}[X=i]\mathbb{P}[Y=j]$$

erfüllt ist. Das liefert die Bedingungen $1/2 - p = 1/2 \times 2/3$, $1/3 - p = 1/2 \times 1/3$ und $1/6 + p = 1/2 \times 2/3$. Das ist alles genau dann erfüllt, wenn $p = 1/6$ ist.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 0 \times \mathbb{P}[X=0] + 1 \times \mathbb{P}[X=1] = 1 - 1/2 = 1/2, \\
\mathbb{E}[Y] &= 0 \times \mathbb{P}[Y=0] + 1 \times \mathbb{P}[Y=1] = 1 - 1/3 = 2/3, \\
\mathbb{E}[XY] &= 0 \times \mathbb{P}[XY=0] + 1 \times \mathbb{P}[XY=1] = \mathbb{P}[X=1, Y=1] = 1/6 + p.
\end{aligned}$$

Da X und Y nur die Werte 0 oder 1 annehmen, gilt $X^2 = X$ und $Y^2 = Y$. Somit hat man

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1/4, \\
\sigma_Y^2 &= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = 2/9.
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ gilt hier genau dann, wenn $p = 1/6$ erfüllt ist (also hier genau dann, wenn X und Y unabhängig sind).

(c) Ein einfaches Beispiel ist das Folgende: Sei U eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $-1, 0, 1$ je mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annimmt. Setze dann $V := U^2$. Intuitiv sind U und V nicht unabhängig. Formal sieht man, dass

$$\mathbb{P}[U=1, V=1] = \mathbb{P}[U=1, U^2=1] = \mathbb{P}[U=1] = \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}[U=1]\mathbb{P}[V=1].$$

Also sind U und V effektiv nicht unabhängig. Wie man leicht zeigt, gilt jedoch $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]$, denn offenbar ist $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[U^3] = \mathbb{E}[U]$ wegen $U^3 = U$ und $\mathbb{E}[U] = 0$.

Aufgabe 7-7. $k \in \mathbb{N}$ Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus $m \in \mathbb{N}$ Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

Führen Sie für jede Ente $n \leq m$ eine Zufallsvariable X_n ein, die angibt, ob die Ente getroffen wurde oder nicht. Es soll also gelten $\{X_n = 1\} = \{$"n-te Ente nicht getroffen"$\}$ und $\{X_n = 0\} = \{$"n-te Ente getroffen"$\}$.

(a) Welche Verteilung hat X_n für $n = 1, \dots, m$?

(b) Wie gross ist die erwartete Anzahl unverletzter Enten?

(c) Sind die Ereignisse $\{X_n = 0\}$, $n = 1, \dots, m$, unabhängig? Untersuchen Sie nur den Fall $k < m$.

Lösung:

(a) X_n kann nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die n-te Ente vom ℓ-ten Jäger nicht getroffen wird, ist $1 - p/m$. Da die Jäger unabhängig voneinander schiessen, beträgt für die n-te, und deswegen für jede, Ente die Chance, unverletzt davonzukommen,

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k.$$

Also sind alle X_n Binomial-verteilt mit Parametern $\tilde{n} = 1$ und $\tilde{p} = (1 - p/m)^k$, also Bernoulli-verteilt mit Parameter $\tilde{p}$.

(b) Die Gesamtzahl X aller nicht verletzten Enten ist gleich $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_m].$$

Da die X_n Indikatorvariablen sind, gilt $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}[X_n = 1] = (1 - p/m)^k$ für alle $n = 1, \dots, m$ und somit

$$\mathbb{E}[X] = m\left(1 - \frac{p}{m}\right)^k.$$

(c) Wir betrachten nur den Fall $k < m$, also weniger Jäger als Enten. Dann sind $X_1, \dots, X_m$ nicht unabhängig, weil

$$\mathbb{P}[X_1 = \cdots = X_m = 0] = 0 < \left(1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k\right)^m = \prod_{n=1}^{m} \mathbb{P}[X_n = 0].$$

Bemerkung: Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_m$ sind auch nicht unabhängig, wenn $k \geq m$ und $m > 1$. Insbesondere ist die Summe X nicht Binomial-verteilt.