

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 8

MC 8-1. Betrachten Sie die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 1 \leq x \leq 4 \text{ und } 1 \leq y \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Genau eine Antwort ist in jeder Frage richtig.)

1. Sind X und Y identisch verteilt, d.h. haben X und Y die gleiche Verteilung?

- (a) Ja.
- (b) Nein.

2. Sind X und Y unabhängig?

- (a) Ja.
- (b) Nein.

3. Sind X und Y i.i.d.?

- (a) Ja.
- (b) Nein.

4. Welche dieser Funktionen ist die Dichtefunktion f_X von X ?

- (a) $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $x \mapsto \frac{1}{9}$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $x \mapsto \frac{1}{3}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{9}, & \text{falls } x \in [1, 4], \\ 1, & \text{falls } x > 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(e) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{3}, & \text{falls } x \in [1, 4], \\ 1, & \text{falls } x > 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(f) $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{falls } x \in [1, 4], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(g) $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } x \in [1, 4], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(h) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{9}, & \text{falls } x \in [1, 4], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

5. Welche der Funktionen aus Frage 4 ist die Verteilungsfunktion F_X von X ?

Aufgabe 8-2. Wir betrachten einen Kreis mit zufälligem Radius R . Der Radius R sei exponentialverteilt mit Erwartungswert $1/\lambda$. Bestimmen Sie

- (a) die Verteilungsfunktion und Dichtefunktion des Flächeninhalts A des zufälligen Kreises;
- (b) den Erwartungswert von A .

Aufgabe 8-3. Eine Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^5}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Finden Sie c und die Verteilungsfunktion von X .
- (b) Finden Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst $\mathbb{E}[1+X]$ und $\mathbb{E}[(1+X)^2]$.

- (c) Was sind die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Y := e^{-X}$?

Aufgabe 8-4. Seien $S \sim \mathcal{N}(-5, 4^2)$ und $T \sim \mathcal{N}(10, 3^2)$ unabhängig.

Hinweis: Sie können die folgende Tatsache verwenden: Wenn X und Y **unabhängig** und normalverteilt sind, dann ist auch $X+Y$ normalverteilt.

- (a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[S < T]$.
- (b) Wäre die Berechnung von $\mathbb{P}[S < T]$ auch ohne die Unabhängigkeits-Annahme korrekt?
- (c) Berechnen Sie die Varianz $\text{Var}[R]$ von $R := S - 2T$.
- (d) Wäre die Berechnung von $\text{Var}[R]$ auch ohne die Unabhängigkeits-Annahme korrekt?

Seien $U \sim \text{Unif}[1, 3]$ und $V \sim \text{Unif}[0, 4]$ (d.h. $f_U(u) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,3]}(u)$ und $f_V(v) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,4]}(v)$) unabhängig.

- (e) Berechnen Sie $\mathbb{E}[2U + V^3]$.
- (f) Wäre die Berechnung von $\mathbb{E}[2U + V^3]$ auch ohne die Unabhängigkeits-Annahme korrekt?

Aufgabe 8-5. Gegeben sei ein Rechteck mit den zufälligen Seitenlängen X und Y . Die gemeinsame Dichtefunktion von X und Y ist gegeben durch

$$f_{X,Y}(x, y) := \begin{cases} C(x^2 + y^2), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie den Parameter C .
- (b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y .
- (c) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Seite X mehr als doppelt so lang wie die Seite Y ist.
- (e) Berechnen Sie die erwartete Fläche des Rechtecks.

Tabelle der Standardnormalverteilung

| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}[Z \leq 1.96] = 0.975$.