Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 9

MC 9-1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Für eine Konstante $c > 0$ ist die gemeinsame Dichte von X und Y gegeben als

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c/(x^2y^2), & x \geq 2, y \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei eine Zufallsvariable Z gegeben mit der Verteilungsfunktion

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z < 0, \\ 0.1, & \text{falls } 0 \leq z < 1, \\ 0.5, & \text{falls } 1 \leq z < 3, \\ 0.8, & \text{falls } 3 \leq z < 5, \\ 1, & \text{falls } z \geq 5. \end{cases}$$

(Genau eine Antwort ist in jeder Frage richtig.)

1. Welchen Wert muss c annehmen, damit $f_{X,Y}$ eine Dichtefunktion ist?
   (a) $c = 2$.
   (b) $c = 1$.
   (c) $c = \frac{1}{2}$.
2. Sind X und Y unabhängig?
   (a) Ja.
   (b) Nein.
3. Sei $E_1 = \{X \leq 2\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_1?
   (a) $\mathbb{P}[E_1] = 0$.
   (b) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{c}{4}$.
   (c) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{c}{6}$.
4. Sei $E_2 = \{X > Y\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_2?
   (a) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{c}{8}$.
   (b) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{3c}{8}$.
   (c) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{c}{4}$.
5. Ist $\mathbb{E}[Z] \geq 3$?
   (a) Ja.
   (b) Nein.
6. Ist $\mathbb{P}[Z \leq 3] = \mathbb{P}[Z \geq 3]$?

(a) Ja.
(b) Nein.

7. Ist $\mathbb{P}[3.5 \leq Z \leq 5.5] = 0.2$?

   (a) Ja.
   (b) Nein.

8. Was ist $\mathbb{E}[Z^2]$?

   (a) $\mathbb{E}[Z^2] = 9.1$.
   (b) $\mathbb{E}[Z^2] = 8.1$.
   (c) $\mathbb{E}[Z^2] = 9$.

9. Was ist $\mathrm{Var}[Z]$?

   (a) $\mathrm{Var}[Z] = 5.8$.
   (b) $\mathrm{Var}[Z] = 8.1$.
   (c) $\mathrm{Var}[Z] = 2.81$.

10. Ist $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[Z = 0] = 0$?

    (a) Ja.
    (b) Nein.

Aufgabe 9-2. Herr Meier fährt täglich mit konstanter Geschwindigkeit dieselbe Strecke s_0 (zum Beispiel von Zürich nach Bern, $s_0 = 120$ km). Die Geschwindigkeit V hängt vom Wetter und den Verkehrsbedingungen ab, und ihre Dichte ist von der Form

$$f_V(v) = \begin{cases} Cv^2 e^{-\lambda v}, & \text{falls } v \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und dem Mittel $\mathbb{E}[V] = v_0$ (zum Beispiel $v_0 = 90$ km/h).

(a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter C und λ (als Funktion von v_0).

   Hinweis: Benützen Sie $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Berechnen Sie die Varianz von V.

(c) Die Fahrzeit ist $T = s_0/V$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von T.

Aufgabe 9-3. Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Randdichte und den Erwartungswert von X und Y.

(b) Bestimmen Sie die beste Prognose für Y der Form $\hat{Y} = aX + b$ derart, dass der Prognosefehler $\mathbb{E}[(Y - \hat{Y})^2]$ minimiert wird.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}[2Y \leq X]$ und $\mathbb{P}[Y \leq 2X]$.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[g(X, Y)]$, wobei $g(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.