Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 9 - Lösungen

MC 9-1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Für eine Konstante $c > 0$ ist die gemeinsame Dichte von X und Y gegeben als

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c/(x^2y^2), & x \geq 2, y \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei eine Zufallsvariable Z gegeben mit der Verteilungsfunktion

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z < 0, \\ 0.1, & \text{falls } 0 \leq z < 1, \\ 0.5, & \text{falls } 1 \leq z < 3, \\ 0.8, & \text{falls } 3 \leq z < 5, \\ 1, & \text{falls } z \geq 5. \end{cases}$$

(Genau eine Antwort ist in jeder Frage richtig.)

1. Welchen Wert muss c annehmen, damit $f_{X,Y}$ eine Dichtefunktion ist?
   (a) $c = 2$.
   (b) $c = 1$.
   (c) $c = \frac{1}{2}$.
2. Sind X und Y unabhängig?
   (a) Ja.
   (b) Nein.
3. Sei $E_1 = \{X \leq 2\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_1?
   (a) $\mathbb{P}[E_1] = 0$.
   (b) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{c}{4}$.
   (c) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{c}{6}$.
4. Sei $E_2 = \{X > Y\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_2?
   (a) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{c}{8}$.
   (b) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{3c}{8}$.
   (c) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{c}{4}$.
5. Ist $\mathbb{E}[Z] \geq 3$?
   (a) Ja.
   (b) Nein.
6. Ist $\mathbb{P}[Z \leq 3] = \mathbb{P}[Z \geq 3]$?

(a) Ja.
(b) Nein.

7. Ist $\mathbb{P}[3.5 \leq Z \leq 5.5] = 0.2$?

   (a) Ja.
   (b) Nein.

8. Was ist $\mathbb{E}[Z^2]$?

   (a) $\mathbb{E}[Z^2] = 9.1$.
   (b) $\mathbb{E}[Z^2] = 8.1$.
   (c) $\mathbb{E}[Z^2] = 9$.

9. Was ist $\mathrm{Var}[Z]$?

   (a) $\mathrm{Var}[Z] = 5.8$.
   (b) $\mathrm{Var}[Z] = 8.1$.
   (c) $\mathrm{Var}[Z] = 2.81$.

10. Ist $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[Z = 0] = 0$?

   (a) Ja.
   (b) Nein.

Lösung:

1. (a). Es gilt

$$\int_1^\infty \int_2^\infty \frac{c}{x^2y^2} dx\, dy = \int_1^\infty \frac{c}{y^2}\Big(- \frac{1}{x}\Big|_{x=2}^\infty\Big) dy = \frac{c}{2}\int_1^\infty \frac{1}{y^2} dy = \frac{c}{2}\Big(- \frac{1}{y}\Big|_{y=1}^\infty\Big) = \frac{c}{2}.$$

   Dies ist genau dann gleich 1, wenn $c = 2$.

2. (a). Die Randdichten f_X und f_Y von X und Y bekommen wir via (wir setzen $c = 2$)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \int_1^\infty \frac{2}{x^2y^2}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)dy = \frac{2}{x^2}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)\Big(- \frac{1}{y}\Big|_{y=1}^\infty\Big) = \frac{2}{x^2}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x),$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = \int_2^\infty \frac{2}{x^2y^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(y)dx = \frac{2}{y^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(y)\Big(- \frac{1}{x}\Big|_{x=2}^\infty\Big) = \frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(y).$$

   Daraus sehen wir, dass $f_{X,Y}$ genau das Produkt der Randdichten f_X und f_Y ist. Daher sind X und Y unabhängig.

3. (a). X ist absolutstetig verteilt mit Dichtefunktion $f_X(x) = \frac{2}{x^2}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$. Daher ist

$$\mathbb{P}[E_1] = \int_{-\infty}^\infty \mathbf{1}_{(-\infty,2]}(x) f_X(x)dx = \int_{-\infty}^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^2 \frac{2}{x^2}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)dx = \int_{\{2\}} \frac{2}{x^2}dx = 0.$$

4. (b). Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(y,\infty)}(x) f_{X,Y}(x,y) dx\, dy \\
&= \int_{1}^{\infty} \int_{2}^{\infty} \mathbf{1}_{(y,\infty)}(x) \frac{c}{x^2 y^2} dx\, dy \\
&= \int_{1}^{\infty} \int_{\max\{2,y\}}^{\infty} \frac{c}{x^2 y^2} dx\, dy \\
&= c\Big(\int_{1}^{2} \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2 y^2} dx\, dy + \int_{2}^{\infty} \int_{y}^{\infty} \frac{1}{x^2 y^2} dx\, dy \Big) \\
&= c\Big(\int_{1}^{2} \frac{1}{y^2} \Big(-\frac{1}{x}\Big|_{x=2}^{\infty} \Big) dy + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{y^2} \Big(-\frac{1}{x}\Big|_{x=y}^{\infty} \Big) dy \Big) \\
&= c\Big(\int_{1}^{2} \frac{1}{2y^2} dy + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{y^3} dy \Big) \\
&= c\Big(-\frac{1}{2y}\Big|_{y=1}^{2} - \frac{1}{2y^2}\Big|_{y=2}^{\infty} \Big) = c\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\Big) = c\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

5. (b). Es gilt $\mathbb{P}[Z = 0] = 0.1$, $\mathbb{P}[Z = 1] = 0.5 - 0.1 = 0.4$, $\mathbb{P}[Z = 3] = 0.8 - 0.5 = 0.3$, und $\mathbb{P}[Z = 5] = 1 - 0.8 = 0.2$. Also ist $\mathbb{E}[Z] = 0.4 + 0.3 \times 3 + 0.2 \times 5 = 2.3 < 3$.
6. (b). Direkte Berechnungen ergeben $\mathbb{P}[Z \leq 3] = 0.8$ und $\mathbb{P}[Z \geq 3] = 1 - \mathbb{P}[Z < 3] = 0.5$.
7. (a). Es gilt $\mathbb{P}[3.5 \leq Z \leq 5.5] = \mathbb{P}[Z = 5] = 0.2$.
8. (b). $\mathbb{E}[Z^2] = 0.4 + 0.3 \times 3^2 + 0.2 \times 5^2 = 0.4 + 2.7 + 5 = 8.1$.
9. (c). Es gilt $\mathrm{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = 8.1 - (2.3)^2 = 2.81$.
10. (b). Wir haben $\mathbb{P}[Z = 0] = 0.1$ und $\mathbb{P}[X = 0] = 0$.

Aufgabe 9-2. Herr Meier fährt täglich mit konstanter Geschwindigkeit dieselbe Strecke s_0 (zum Beispiel von Zürich nach Bern, $s_0 = 120$ km). Die Geschwindigkeit V hängt vom Wetter und den Verkehrsbedingungen ab, und ihre Dichte ist von der Form

$$f_V(v) = \begin{cases} Cv^2 e^{-\lambda v}, & \text{falls } v \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und dem Mittel $\mathbb{E}[V] = v_0$ (zum Beispiel $v_0 = 90$ km/h).

(a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter C und λ (als Funktion von v_0).

Hinweis: Benützen Sie $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Berechnen Sie die Varianz von V.

(c) Die Fahrzeit ist $T = s_0/V$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von T.

Lösung:

(a) Es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv = 1$ und $\mathbb{E}[V] = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)dv = v_0$. Wir erhalten mit dem Hinweis in der Aufgabe und der Substitution $x = \lambda v$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)dv = \int_0^{\infty} Cv^2 e^{-\lambda v}dv = C\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 e^{-x}\frac{1}{\lambda}dx = \frac{C}{\lambda^3}2! = \frac{2C}{\lambda^3}.$$

Es folgt $C = \frac{\lambda^3}{2}$, wobei wir $\lambda > 0$ annehmen. Mit der gleichen Substitution folgt

$$v_0 = \mathbb{E}[V] = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v)dv = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\lambda v}dv = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^3 e^{-x}\frac{1}{\lambda}dx = 3!\frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{\lambda}.$$

Es gilt daher $\lambda = \frac{3}{v_0}$ und damit $C = \frac{\lambda^3}{2} = \frac{27}{2v_0^3}$. Beachten Sie zudem, dass $f_V \geq 0$ gilt, da $C > 0$.

(b) Die Formel (3.3.4) aus dem Skript und die gleiche Substitution wie zuvor ergeben

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[V] = \mathbb{E}[V^2] - (\mathbb{E}[V])^2 &= \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{\infty} v^4 e^{-\lambda v}dv - (3/\lambda)^2\\ &= 4!\frac{1}{2\lambda^2} - 9/\lambda^2 = 3/\lambda^2 = \frac{v_0^2}{3}.\end{aligned}$$

Beachten Sie: weil v_0 in km/h ist, ist das in (km/h)^2.

(c) Es gilt unter Verwendung der Formel (3.3.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[s_0/V] = s_0\mathbb{E}[1/V] &= s_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{v}f_V(v)dv\\ &= s_0\int_0^{\infty}\frac{\lambda^3}{2}ve^{-\lambda v}dv = \frac{s_0\lambda}{2} = \frac{3s_0}{2v_0}.\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass $\mathbb{E}[1/V] \neq 1/\mathbb{E}[V]$, also $\mathbb{E}[T] \neq s_0/v_0$.

Erneut unter Verwendung der Formel (3.3.4) ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[T] = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = \mathbb{E}\Big[\frac{s_0^2}{V^2}\Big] - \left(\frac{s_0\lambda}{2}\right)^2 &= \frac{s_0^2\lambda^3}{2}\int_0^{\infty} e^{-\lambda v}dv - \left(\frac{s_0\lambda}{2}\right)^2\\ = \frac{s_0^2\lambda^2}{2} - \frac{s_0^2\lambda^2}{4} = \frac{s_0^2\lambda^2}{4} = \frac{9s_0^2}{4v_0^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 9-3. Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases}\frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Randdichte und den Erwartungswert von X und Y.

(b) Bestimmen Sie die beste Prognose für Y der Form $\hat{Y} = aX + b$ derart, dass der Prognosefehler $\mathbb{E}[(Y - \hat{Y})^2]$ minimiert wird.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}[2Y \leq X]$ und $\mathbb{P}[Y \leq 2X]$.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[g(X,Y)]$, wobei $g(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Die Randdichte f_X von X ist gegeben durch $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$. Für $x < 0$ und $x > 1$ gilt $f_X(x) = 0$; für $x \in [0,1]$ erhält man

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)dy = \frac{3}{2}\Big(x^2 + \frac{1}{3}\Big) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Der Erwartungswert von X beträgt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^3 + x)dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{5}{8}. \tag{1}$$

Völlig analog (denn die Situation ist symmetrisch in X und Y) erhählt man

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\Big(\frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}\Big) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{5}{8}.$$

(b) Unter Verwendung der Formel (3.5.4) aus dem Skript haben wir

$$\hat{Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var[X]}}(X - \mathbb{E}[X]) + \mathbb{E}[Y].$$

Wir haben $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{8}$ gemäss (1) und somit, aufgrund der Symmetrie, $\mathbb{E}[Y] = \frac{5}{8}$. Ferner ist

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 \Big(\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2\Big)dx = \frac{3}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{7}{15},$$

und daher

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{7}{15} - \Big(\frac{5}{8}\Big)^2 = \frac{73}{960}.$$

Es gilt ausserdem

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^1 xy(x^2+y^2)dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 \Big(\frac{y}{4} + \frac{y^3}{2}\Big)dy = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{3}{8}$$

und daher

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{8} - \Big(\frac{5}{8}\Big)^2 = -\frac{1}{64}.$$

Insgesamt ist also

$$\hat{Y} = -\frac{\frac{1}{64}}{\frac{73}{960}}\Big(X - \frac{5}{8}\Big) + \frac{5}{8} = -\frac{15}{73}\Big(X - \frac{5}{8}\Big) + \frac{5}{8}.$$

(c) Wir bestimmen zuerst $\mathbb{P}[2Y \leq X]$. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[2Y \leq X] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(-\infty,x/2]}(y) f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^{x/2}(x^2+y^2)dy\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 \Big(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{24}\Big)dx = \frac{3}{2}\frac{13}{96} = \frac{13}{64}.\end{aligned}$$

$\mathbb{P}[Y \leq 2X]$ berechnet man entweder analog (der Integrationsbereich ist in diesem Falle ein Trapez) oder man bemerkt, dass wegen der Symmetrie $f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(y,x)$ (d.h. die Funktion $f_{X,Y}(x,y)$ ist symmetrisch bezüglich der Diagonalen $x = y$) gilt

$$\mathbb{P}[Y \leq 2X] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq X/2] = \frac{51}{64}.$$

Ohne Symmetrieargument berechnen wir direkt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y \leq 2X] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(-\infty,2x]}(y) f_{X,Y}(x,y)dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\min\{1,2x\}} \frac{3}{2}(x^2+y^2)dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\int_0^{2x}(x^2+y^2)dy\,dx + \frac{3}{2}\int_{1/2}^1\int_0^1 (x^2+y^2)dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\left(2x^3 + \frac{8x^3}{3}\right)dx + \frac{3}{2}\int_{1/2}^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx \\
&= \frac{3}{2}\times\frac{14}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^4} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right) + \frac{3}{2}\times\frac{1}{6} \\
&= \frac{51}{64}.
\end{aligned}$$

(d) Die Verwendung der Formel (3.4.1) aus dem Skript ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X,Y)] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{X^2+Y^2}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+y^2} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy \\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\frac{3}{2}(x^2+y^2)dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{3}{2}x\,dx\,dy = \frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$