

## Serie 2

### MODELLE FORMALER THEORIEN

---

8. Sei  $R$  ein 2-stelliges Relationssymbol, sei  $\mathcal{L} = \{R\}$  und seien  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die folgenden drei  $\mathcal{L}$ -Sätze:

$$\sigma_1 \equiv \forall x(Rxx), \quad \sigma_2 \equiv \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx), \quad \sigma_3 \equiv \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz).$$

Konstruiere drei Modelle  $M_1, M_2, M_3$  mit Bereich  $\{a, b, c\}$  sodass gilt:

- (a)  $M_1 \models \neg\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$
- (b)  $M_2 \models \sigma_1 \wedge \neg\sigma_2 \wedge \sigma_3$
- (c)  $M_3 \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \neg\sigma_3$

9. Definiere auf  $\mathbb{N}$  eine binäre Relation “ $<$ ” sodass gilt:

$$(\mathbb{N}, <) \models \text{DLO}$$

10. Für positive ganze Zahlen  $n$  sei  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ , sei  $S_n$  die Menge aller Bijektionen  $f : [n] \rightarrow [n]$  und für Funktionen  $f, g \in S_n$  sei  $f \circ g(a) := f(g(a))$  (für  $a \in [n]$ ). Weiter sei  $\iota : [n] \rightarrow [n]$  die Identität, d.h.  $\iota(a) = a$  für alle  $a \in [n]$ .

Zeige, dass für  $n \geq 3$ ,  $(S_n, \iota, \circ)$  eine nicht-kommutative Gruppe ist.

11. Sei  $\mathbb{Z}[X]$  die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ .

Zeige, dass  $(\mathbb{Z}[X], 0, 1, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring ist, wobei  $0, 1 \in \mathbb{Z}$  und  $+, \cdot$  die Polynomaddition bzw. Polynommultiplikation bezeichnet.

12. Für eine positive ganze Zahl  $m$  sei  $\mathbb{Z}_m := \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ . Auf  $\mathbb{Z}_m$  seien die beiden binären Operationen “ $+$ ” und “ $\cdot$ ” wie folgt definiert:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} : \iff m \text{ teilt } (a + b) - c$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c} : \iff m \text{ teilt } (a \cdot b) - c$$

- (a) Zeige, dass für alle  $m \geq 2$ ,  $(\mathbb{Z}_m, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring ist.

- (b) Zeige, dass für Primzahlen  $p$ ,  $(\mathbb{Z}_p, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot)$  ein Körper ist.

*Hinweis:* Zeige, dass für  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ ,  $\bar{a} \neq \bar{0}$ , die Elemente  $\bar{1} \cdot \bar{a}, \bar{2} \cdot \bar{a}, \dots, \overline{p-1} \cdot \bar{a}$  paarweise verschieden und verschieden von  $\bar{0}$  sind.

13. Auf der Menge  $K = \{0, 1, \alpha, \beta\}$  werden zwei binäre Operationen “+” und “·” wie folgt definiert:

+	0	1	$\alpha$	$\beta$
0	0	1	$\alpha$	$\beta$
1	1	0	$\beta$	$\alpha$
$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	0	1
$\beta$	$\beta$	$\alpha$	1	0

·	0	1	$\alpha$	$\beta$
0	0	0	0	0
1	0	1	$\alpha$	$\beta$
$\alpha$	0	$\alpha$	$\beta$	1
$\beta$	0	$\beta$	1	$\alpha$

Zeige, dass  $\mathbb{K} = (K, 0, 1, +, \cdot)$  ein Modell für KT ist, d.h.  $\mathbb{K}$  ist eine Körper mit vier Elementen.

14. Sei  $T_0 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$  eine Theorie mit der Signatur  $\mathcal{L}_{GT}$ , wobei gilt:

$$\sigma_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$$

$$\sigma_1 \equiv \forall x (e \circ x = x)$$

$$\sigma_2 \equiv \forall x \exists y (x \circ y = e)$$

Die  $\mathcal{L}_{GT}$ -Struktur  $M$  mit Bereich  $A = \{\alpha, \beta\}$  sei definiert durch  $e^M := \alpha$  und  $x \circ y := y$  für alle  $x, y \in A$ .

- (a) Zeige:  $M \models T_0$ .  
 (b) Zeige:  $M \not\models GT$ .

*Bemerkung:* Ist  $G$  eine Gruppe, so gilt  $G \models T_0$ , d.h. die Axiome von  $T_0$  können aus GT bewiesen werden. Andererseits folgt aus (b), dass die Gruppenaxiome GT nicht aus  $T_0$  bewiesen werden können.