Serie 4

ZUR ÜBERABZÄHLBARKEIT VON $\mathbb{R}$

---

16. Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ heisst *algebraisch* falls r eine Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

17. Zeige, dass $\mathbb{R}^+$ überabzählbar ist.

Hinweis: Für $x \subseteq \omega$ sei

$$\beta_x := \bigcup \Big\{ \alpha_{p_k} : k \in \omega \ \wedge \ p_k \ = 1 + \sum_{n \in (k \cap x)} \frac{1}{3^n} \Big\}.$$

18. Konstruiere eine überabzählbare Menge $X \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q})$, sodass gilt:

$$(X, \subsetneq) \models \mathsf{DLO}$$

Bemerkung: Obwohl $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, besitzt $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ überabzählbare Ketten von grösserwerdenden Mengen.

19. (a) Konstruiere eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die nirgends stetig ist.

(b) Konstruiere eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die auf $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ stetig und auf $\mathbb{Q}$ unstetig ist.