Serie 6

Ein Nichtstandard-Modell der Peano-Arithmetik

---

23. Beweise das Ultrafilter-Theorem mit Hilfe des Teichmüller-Prinzips, und folgere daraus die Existenz von nicht-trivialen Ultrafiltern über ω.

Im Folgenden sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ein nicht-trivialer Ultrafilter über ω. Auf der Menge der Funktionen $f : \omega \to \omega$ definieren wir die Äquivalenzrelation "$\sim$" durch

$$f \sim g \ :\Longleftrightarrow\ \big\{n \in \omega : f(n) = g(n)\big\} \in \mathscr{U}\ .$$

Für jede Funktion $f \in {}^{\omega}\omega$ sei

$$[f] := \{g \in {}^{\omega}\omega : g \sim f\},$$

und sei

$$\omega^* := \big\{[f] : f \in {}^{\omega}\omega\big\}.$$

Wir konstruieren nun die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}^*$ mit Bereich ω^* wie folgt:

- Für das Konstantensymbol $0 \in \mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ sei $f_0 \in {}^{\omega}\omega$ definiert durch

  $$f_0(n) := 0 \quad \text{für alle } n \in \omega,$$

  und sei

  $$0^{\mathbb{N}^*} := [f_0].$$

- Für das 1-stellige Funktionssymbol s in $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ sei $\mathsf{s}(f)$ definiert durch

  $$\mathsf{s}(f)(n) := f(n) + 1 \quad \text{für } n \in \omega,$$

  und sei

  $$\mathsf{s}^{\mathbb{N}^*}\big([f]\big) := [\mathsf{s}(f)].$$

- Für die binären Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ in $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ definieren wir $f+g$ und $f \cdot g$ (für $f, g \in {}^{\omega}\omega$) durch

  $$\begin{aligned}(f+g)(n) &:= f(n) +^{\mathbb{N}} g(n) \quad (\text{für alle } n \in \omega)\,,\\ (f \cdot g)(n) &:= f(n) \cdot^{\mathbb{N}} g(n) \quad (\text{für alle } n \in \omega)\,,\end{aligned}$$

  und sei

  $$[f] +^{\mathbb{N}^*} [g] := [f+g] \quad \text{und} \quad [f] \cdot^{\mathbb{N}^*} [g] := [f \cdot g].$$

24. (a) Für $k \in \omega$ sei $c_k \in {}^{\omega}\omega$ definiert durch $c_k(n) = k$ für alle $n \in \omega$.
Zeige, dass ein $[g] \in \omega^*$ existiert, sodass für jedes $k \in \omega$ gilt:

$$\mathbb{N}^* \vDash [c_k] < [g]$$

(b) Zeige, dass der Bereich ω^* von $\mathbb{N}^*$ überabzählbar ist.

(c) Zeige: Für alle $[g], [g'] \in \omega^*$ mit $[g] < [g']$ ist die Menge

$$\big\{[f] \in \omega^* :\ [g] \leqslant [f] \leqslant [g']\big\}$$

entweder endlich oder überabzählbar.