

Serie 7

NICHTSTANDARD-ANALYSIS

25. Bestimme $\sin'(x_0)$ mithilfe von Nichtstandard-Analysis.

Hinweis: Man kann das Additionstheorem verwenden.

26. **Die Regel von Bernoulli-de L'Hospital:**

Beweise die folgende Aussage mithilfe von Nichtstandard-Analysis: Seien f und g zwei reellwertige Funktionen, die bei $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, wobei $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ist. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

27. **Die Dirac Delta-Funktion:** Sei g eine reellwertige Funktion, die bei 0 stetig ist und sei δ positiv infinitesimal. Bezüglich δ definieren wir die Funktion

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\delta^2} + \frac{1}{\delta} & \text{für } -\delta < x \leq 0, \\ -\frac{x}{\delta^2} + \frac{1}{\delta} & \text{für } 0 < x < \delta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass dann $\text{st} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_\delta(x) dx \right) = g(0)$ gilt.