Serie 8

Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann ist G **kreisfrei**, wenn G keine Kreise (d.h. keine geschlossene Kantenzüge) enthält. G ist ein **Baum**, wenn G zusammenhängend und kreisfrei ist.

28. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist kreisfrei, aber wenn wir eine neue Kante hinzufügen, so entsteht ein Kreis.

(c) G enthält keine Schlingen und für beliebige zwei Knoten a, b (mit $a \neq b$) gibt es genau einen Kantenzug von a nach b.

(d) G ist zusammenhängend, aber wenn wir irgendeine Kante löschen, so ist G unzusammenhängend.

29. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter und nicht-leerer Graph. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.

(c) G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.

30. Beweise den folgenden Satz von Cayley für nicht-leere Graphen: Es gibt n^{n-2} verschiedene Bäume mit n festgelegten Knoten.

Hinweis: Sei $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Knotenmenge und sei $T = (V, E)$ ein Baum. Sei b_1 der Endkoten (Knoten mit Grad 1) mit kleinster Nummer und a_1 der mit b_1 adjazente Knoten. Entferne den Knoten b_1 und die Kante (a_1, b_1). Der Restgraph ist wieder ein Baum. Fahre so fort bis nur noch eine Kante übrig bleibt. Zu zeigen ist, dass eine Bijektion zwischen den Bäumen $T = (V, E)$ und den $(n - 2)$-Tupeln $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$ existiert.