

Serie 9

DIE CHROMATISCHE ZAHL

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlingenfreier, endlicher oder unendlicher Graph und sei $n \in \omega$ mit $n \geq 1$. Dann ist G **n -färbbar**, wenn es eine Funktion $\chi_n : V \rightarrow n$ gibt, sodass für alle $\{x, y\} \in E$ gilt $\chi_n(x) \neq \chi_n(y)$. Weiter sei

$$\chi(G) := \min \{n \in \omega : G \text{ ist } n\text{-färbbar}\}$$

die **chromatische Zahl** des Graphen G .

31. Bestimme jeweils die chromatische Zahl der Kantengraphen der fünf platonischen Körper *Tetraeder*, *Würfel*, *Oktaeder*, *Dodekaeder* und *Ikosaeder*.
32. (a) Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann 2-färbbar ist, wenn er bipartit ist.
(b) Zeige, dass jeder Baum 2-färbbar ist.
(c) Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann 2-färbbar ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.
33. Sei $G_+^\times = (V, E)$ der Graph der *paarweisen Summen und Produkte*, der wie folgt definiert ist:

$$V := \omega \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad E := \{\{a, b\} \subseteq V : a \neq b \wedge \exists x, y \in \omega (x + y = a \wedge x \cdot y = b)\}$$

- (a) Zeige: $\chi(G_+^\times) \geq 3$.
- (b) Sei $G_+^\times|_{\geq m}$ der Graph G_+^\times eingeschränkt auf die Knotenmenge $V' = V \setminus m$.
Zeige: Für alle $m \in \omega$ ist $\chi(G_+^\times|_{\geq m}) \geq 3$.
Bemerkung: Inzwischen ist bekannt, dass $\chi(G_+^\times) = \infty$ ist.