Musterlösung Serie 0

FORMALE BEWEISE

---

0. (a) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ (duplex negatio affirmat)

(d) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

(e) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Kontraposition)

(f) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ (ex falso quodlibet)

Lösung:

(a) Wir zeigen zuerst, dass $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$ mit L_3 bis L_5 äquivalent ist zu $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$ und $\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$. Dabei sei $A := \varphi \wedge \psi$ und $B := \psi \wedge \varphi$. Nun reicht es, zu zeigen $A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$ und $A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\
\mathsf{L}_3 & ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
\mathsf{MP} & A \rightarrow B \\
\mathsf{L}_4 & ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
\mathsf{MP} & B \rightarrow A,
\end{array}$$

sowie $\{A \rightarrow B, B \rightarrow A\} \vdash A \leftrightarrow B$

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni & A \rightarrow B \\
\mathsf{T} \ni & B \rightarrow A \\
\mathsf{L}_5 & (B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))) \\
\mathsf{MP} & (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\
\mathsf{MP} & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).
\end{array}$$

Wir können nun also davon ausgehen, dass gilt $\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ und $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$. Aus Symmetriegründen reicht es, wenn wir nur eine der beiden Tautologien (das heisst, wahre Aussagen, die aus der leeren Theorie folgen) nachweisen können. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM ist $\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ äquivalent zu $\psi \wedge \varphi \vdash \varphi \wedge \psi$ und dies wiederum zu $\{\psi, \varphi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ wieder mit L_3 bis L_5. Nun lässt sich $\{\psi, \varphi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ mit L_5 und zweimal MODUS PONENS sehr schnell nachweisen.

(b) Mit denselben Argumenten wie bei der vorherigen Aufgabe kann man zeigen, dass es im Wesentlichen reicht, wenn wir $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$ nachweisen können. Wie man Letzteres zeigt, wird nun Schritt für Schritt erläutert:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_8 & (\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi))) \\
\mathsf{L}_6 & \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi) \\
\mathsf{MP} & (\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi))
\end{array}$$

L_7 $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
MP $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$

(c) Wie zuvor brauchen wir nur die beiden Tautologien $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ und $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ zu beweisen. Wir zeigen nur die erste Aussage. Der Beweis von $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ findet man im Buch "Gödel's Theorem and Zermelo's Axioms" auf Seite 21 (Example 2.2).

L_9 $\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$
L_8 $(\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to ((\neg\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)))$
MP $(\neg\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to ((\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi))$
L_1 $\neg\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$
MP $(\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$
L_0 $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$
MP $\varphi \to \neg\neg\varphi$

(d) Da die beiden Ausdrücke $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ und $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$ nicht symmetrisch sind, müssen beide gezeigt werden.

Wir beginnen mit dem ersten Teil, der nach zweimaliger Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS zu $\{\neg\varphi \vee \psi, \varphi\} \vdash \psi$ äquivalent ist. Beachte, dass die folgenden Implikationen, $\neg\neg\varphi \to \varphi$ und $\varphi \to \neg\neg\varphi$, Tautologien sind, welche wir bei der nächsten Teilaufgabe und bei Aufgabe 1 (b) beweisen werden. Ausserdem verwenden wir die Tautologie und $\psi \to \psi$, welche aus L_1 und L_2 folgt (siehe auch Aufgabe 1 (b)). Unter der Verwendung dieser gilt:

$\mathsf{T} \ni$ φ
Taut $\varphi \to \neg\neg\varphi$
MP $\neg\neg\varphi$
L_9 $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
MP $\neg\varphi \to \psi$
L_8 $(\neg\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \psi) \to ((\neg\varphi \vee \psi) \to \psi))$
MP $(\psi \to \psi) \to ((\neg\varphi \vee \psi) \to \psi)$
$\mathsf{T} \ni$ $\psi \to \psi$
MP $(\neg\varphi \vee \psi) \to \psi$
$\mathsf{T} \ni$ $\neg\varphi \vee \psi$
MP ψ

Für den zweiten Teil zeigen wir zuerst $\{\neg\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$ formal:

$\mathsf{T} \ni$ $\neg\varphi$
L_6 $\neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \psi)$
MP $\neg\varphi \vee \psi,$

Desweitern brauchen wir $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi$ zu zeigen:

$\mathsf{T} \ni$ φ
$\mathsf{T} \ni$ $\varphi \to \psi$
MP ψ
L_7 $\psi \to (\neg\varphi \vee \psi)$
MP $\neg\varphi \vee \psi$

Wenden wir nun das DEDUKTIONSTHEOREM mehrmals auf die letzten beiden Resultate an, dann bekommen wir die Tautologien $\vdash \neg\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi))$ und $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi))$. Definieren wir nun $\chi :\equiv (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$, dann können wir den zweiten Teil wie folgt formal beweisen:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_8 & (\varphi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \chi) \to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi)) \\
\mathsf{Taut} & \varphi \to \chi \\
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \chi) \to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi) \\
\mathsf{Taut} & \neg\varphi \to \chi \\
\mathsf{MP} & (\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi \\
\mathsf{L}_0 & \varphi \vee \neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \chi
\end{array}$$

(e) Falls φ und ψ Formeln sind, dann ist $\varphi \Leftrightarrow \psi$, definiert durch $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, eine Äquivalenzrelation. Dies folgt hauptsächlich daraus, dass $\vdash \varphi \to \varphi$ für jedes φ eine Tautologie ist, "$\wedge$" symmetrisch ist und weil "$\to$" mit L_1 und L_2 transitiv ist.

Wir können nun die vorherigen Teilaufgaben verwenden und wie folgt vorgehen, um einen formalen Beweis zu finden:

$$\varphi \to \psi \overset{(c)}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vee \psi \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \psi \vee \neg\varphi \overset{(c)}{\Leftrightarrow} \neg\psi \to \neg\varphi$$

(f) Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM ist $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ äquivalent zu $\{\varphi \wedge \neg\varphi\} \vdash \psi$ und dies können wir wie folgt formal beweisen:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni & \varphi \wedge \neg\varphi \\
\mathsf{L}_3 & (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \varphi \\
\mathsf{MP} & \varphi \\
\mathsf{L}_4 & (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi \\
\mathsf{L}_9 & \neg\varphi \to (\varphi \to \psi) \\
\mathsf{MP} & \varphi \to \psi \\
\mathsf{MP} & \psi
\end{array}$$

Bemerkung: Grundsätzlich sollten die formalen Beweise so geschrieben werden wie im Skript der ersten Woche (z.B. sollte auch angegeben werden auf welche Formeln Modus Ponens oder Verallgemeinerung angewandt wird). Wir haben in den Lösungen der Übersichts halber jedoch darauf verzichtet. Auch müsste anstelle der Zeilen mit "Taut" eigentlich die Beweise dieser Tautologien stehen, da diese keine logischen Axiome sind.

1. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ das Axiomenschema

$$(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big).$$

(a) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_0, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_8, \mathsf{L}_9\} \vdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$

(b) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

Lösung: Da wir im Beweis des DEDUKTIONSTHEOREMS L_1, L_2 und L_{12} verwendet haben, aber in den folgenden formalen Beweisen die VERALLGEMEINERUNGSREGEL nicht benutzt haben, dürfen wir das DEDUKTIONSTHEOREM bei allen folgenden Teilaufgaben verwenden.

(a) Betrachte $\mathsf{T} = \{\varphi \to \psi, \varphi \to \neg\psi, \varphi\}$ und den folgenden formalen Beweis:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni & \varphi \\
\mathsf{T} \ni & \varphi \to \psi \\
\mathsf{MP} & \psi \\
\mathsf{T} \ni & \varphi \to \neg\psi \\
\mathsf{MP} & \neg\psi \\
\mathsf{L}_9 & \neg\psi \to (\psi \to \neg\varphi) \\
\mathsf{MP} & \psi \to \neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi
\end{array}$$

Nachzweimaliger Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREM erhalten wir also

$$\{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$$

Mithilfe von L_1 und MODUS PONENS erhalten wir leicht

$$\{\neg\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$$

Definiere $\chi :\equiv (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM sehen wir somit, dass $\varphi \to \chi$ und $\neg\varphi \to \chi$ Tautologien sind. Nun können wir zeigen:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_8 & (\varphi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \chi) \to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi)) \\
\mathsf{Taut} & \varphi \to \chi \\
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \chi) \to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi) \\
\mathsf{Taut} & \neg\varphi \to \chi \\
\mathsf{MP} & (\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi \\
\mathsf{L}_0 & \varphi \vee \neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \chi,
\end{array}$$

was zu beweisen war.

(b) Die Aussage $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ ist mit dem DEDUKTIONSTHEOREM äquivalent zu $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$ und dies wiederum können wir formal beweisen:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_1 & \varphi \to (\neg\varphi \to \varphi) \\
\mathsf{T} \ni & \varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi \to \varphi \\
\mathsf{L}_1 & \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\varphi) \\
\mathsf{L}_2 & (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\varphi)) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)) \\
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi \to \neg\varphi \\
\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}} & (\neg\varphi \to \varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi) \\
\mathsf{MP} & (\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi \\
\mathsf{MP} & \neg\neg\varphi
\end{array}$$

Bemerkung: Streng genommen ist die Verwendung von $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ im formalen Beweis jedoch nicht zulläsig, da es sich hierbei nicht um ein logisches Axiom handelt. Korrekt wäre, wenn anstelle dieser Zeile der formale Beweis der letzten Teilaufgabe stehen würde.

2. Zeige, dass die Gleichheitsrelation "=" transitiv ist, d.h. zeige, dass gilt:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z \big)$$

Lösung: Wir zeigen $\{x = y \wedge y = z\} \vdash x = z$:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{T} \ni & x = y \wedge y = z \\
\mathsf{L}_4 & (x = y \wedge y = z) \rightarrow y = z \\
\mathsf{MP} & y = z \\
\mathsf{L}_5 & y = z \rightarrow (x = x \rightarrow (x = x \wedge y = z)) \\
\mathsf{MP} & x = x \rightarrow (x = x \wedge y = z) \\
\mathsf{L}_{14} & x = x \\
\mathsf{MP} & x = x \wedge y = z \\
\mathsf{L}_{15} & (x = x \wedge y = z) \rightarrow (x = y \rightarrow x = z) \\
\mathsf{MP} & x = y \rightarrow x = z \\
\mathsf{L}_3 & (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = y \\
\mathsf{MP} & x = y \\
\mathsf{MP} & x = z
\end{array}$$

Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM folgt also

$$\vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z.$$

Nach dreimaliger Anwendungen der VERALLGEMEINERUNGSREGEL haben wir schliesslich

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z \big),$$

was zu beweisen war.

3. Sei T eine Theorie. Zeige das Prinzip eines *Widerspruchbeweises*, d.h. zeige, dass wenn aus $\mathsf{T} + \varphi$ ein Widerspruch folgt, dass dann $\neg\varphi$ aus T beweisbar ist. Mit anderen Worten, zeige, dass gilt:

$$\mathsf{T} + \varphi \vdash \psi \wedge \neg\psi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{T} \vdash \neg\varphi$$

Lösung: Mit L_3, L_4, L_5 ist $\mathsf{T} + \varphi \vdash \psi \wedge \neg\psi$ äquivalent zu $\mathsf{T} + \varphi \vdash \psi$ und $\mathsf{T} + \varphi \vdash \neg\psi$. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM ist das Letztere äquivalent zu $\mathsf{T} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ und $\mathsf{T} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$. Nun haben wir bei Aufgabe 1 gezeigt, dass $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ eine Tautologie ist. Wir können nun folgendermassen vorgehen:

$$\begin{array}{rl}
\vdash & \varphi \rightarrow \psi \\
\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}} & (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi \big) \\
\mathsf{MP} & (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi \\
\vdash & \varphi \rightarrow \neg\psi \\
\mathsf{MP} & \neg\varphi
\end{array}$$