D-MATH Grundstrukturen FS 2024

Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Musterlösung Serie 3

KONSTRUKTION EINES MODELLS $\mathbb{N}$ DER PEANO-ARITHMETIK

Die Menge ω, wie sie in der Vorlesung konstruiert wurde, hat folgende Eigenschaften (die sich aus den Axiomen 0–6 beweisen lassen):

(i) Für jedes $n \in \omega$ ist entweder $n = 0$ oder es existiert ein $m \in \omega$ mit $n = m + 1$, wobei $m + 1 := m \cup \{m\}$.

(ii) Die Menge ω ist durch $\in$ wohlgeordnet, d.h. $\in$ ist transitiv, es gilt Trichotomie (d.h. für alle $n, m \in \omega$ gilt entweder $n \in m$, oder $n = m$, oder $m \in n$), und jede nicht-leere Teilmenge $S \subseteq \omega$ hat ein $\in$-minimales Element (d.h. es existiert ein $n_0 \in S$, sodass für alle $m \in S$ gilt $m \notin n_0$).

15. Konstruiere aus den Axiomen 0–6 ein Modell $\mathbb{N}$ der Peano-Arithmetik mit Bereich ω.

Hinweise:

- Definiere $0^{\mathbb{N}} := 0$.
- Definiere $\mathrm{s}^{\mathbb{N}} := \big\{\langle m, n\rangle \in \omega \times \omega : n = m + 1\big\}$.
- Definiere die Funktion $+^{\mathbb{N}}$ mit dem Aussonderungsaxiom als Teilmenge des cartesischen Produkts $(\omega \times \omega) \times \omega$ durch

$$+^{\mathbb{N}} := \bigcap \big\{X \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega : \varphi(X)\big\}$$

  mit

$$\varphi(X) :\equiv \forall n, m, k \in \omega \Big(\big\langle\langle n, 0\rangle, n\big\rangle \in X \ \wedge \\ \big(\big\langle\langle n, m\rangle, k\big\rangle \in X \rightarrow \big\langle\langle n, m+1\rangle, k+1\big\rangle \in X\big)\Big).$$

- Ebenso definiere die Funktion $\cdot^{\mathbb{N}}$ mit dem Aussonderungsaxiom als Teilmenge des cartesischen Produkts $(\omega \times \omega) \times \omega$.

Lösung: Wir definieren die Funktion $\cdot^{\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$\cdot^{\mathbb{N}} := \bigcap \big\{X \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega : \varphi(X)\big\}$$

mit

$$\psi(X) :\equiv \forall n, m, k, k' \in \omega \Big(\big\langle\langle n, 0\rangle, 0\big\rangle \in X \ \wedge \\ \big(\big\langle\langle n, m\rangle, k\big\rangle \in X \rightarrow \big\langle\langle n, m+1\rangle, k +^{\mathbb{N}} n\big\rangle \in X\big)\Big).$$

Wir müssen zuerst nachweisen, dass $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}$, $+^{\mathbb{N}}$ und $\cdot^{\mathbb{N}}$ Funktionen sind:

- Da ω eine induktive Menge ist, gilt für jedes $n \in \omega$, dass auch $n+1 \in \omega$ ist. Angenommen es gibt ein $n \in \omega$, sodass für $m, m' \in \omega$ mit $m \neq m'$ gilt

$$\langle n, m\rangle \in \mathrm{s}^{\mathbb{N}} \wedge \langle n, m'\rangle \in \mathrm{s}^{\mathbb{N}},$$

dann haben wir nach Definition von $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}$

$$m = n+1 \wedge m' = n+1.$$

Da m und m' die gleichen Elemente haben, folgt mit dem Extensionalitätsaxiom, dass $m = m'$ ist. Wir erhalten also einen Widerspruch.

- Zuerst zeigen wir, dass es für jedes $\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega$ mindestens ein $k \in \omega$ gibt, mit

$$\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \in +^{\mathbb{N}}.$$

Wir zeigen das indirekt. Sei $\langle n, m'\rangle \in \omega \times \omega$, sodass für jedes $k \in \omega$ gilt

$$\langle\langle n, m'\rangle, k\rangle \notin +^{\mathbb{N}}.$$

Wähle

$$m := \min\{m' \in \omega \mid \forall k \in \omega(\langle\langle n, m'\rangle, k\rangle \notin +^{\mathbb{N}})\}.$$

Es ist $m \neq 0^{\mathbb{N}}$, denn sonst wäre $\langle\langle n, 0^{\mathbb{N}}\rangle, n\rangle \notin +^{\mathbb{N}}$, was der Definition von $+^{\mathbb{N}}$ widersprechen würde. Das heisst, es gibt nach (i) ein $t \in \omega$ mit $m = t+1$ und es gibt ein k' mit

$$\langle\langle n, t\rangle, k'\rangle \in +^{\mathbb{N}}.$$

Aber dann ist

$$\langle\langle n, m\rangle, k'+1\rangle \in +^{\mathbb{N}}$$

und wir erhalten somit einen Widerspruch. Die Eindeutigkeit von k folgt nun aus der Definition von $+^{\mathbb{N}}$. Da $+^{\mathbb{N}}$ als Durchschnitt definiert ist, entspricht dieses der kleinsten Menge $Y \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega$, sodass $\varphi(Y)$ gilt. Nun erfüllen beispielsweise die natürlichen Zahlen mit der Addition unseres Alltags die Axiome von φ, wobei bei dieser k immer eindeutig ist. Deshalb kann es in $+^{\mathbb{N}}$ für $\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega$ höchstens ein $k \in \omega$ geben mit $\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \in +^{\mathbb{N}}$.

- Sei $\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega$, sodass für jedes $k \in \omega$ gilt

$$\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \notin \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Wieder nehmen wir an, dass m minimal ist mit dieser Eigenschaft, wobei n fix ist. Ist $m = 0^{\mathbb{N}}$, so gilt

$$\langle\langle n, 0^{\mathbb{N}}\rangle, 0^{\mathbb{N}}\rangle \notin \cdot^{\mathbb{N}},$$

was der Definition von $\cdot^{\mathbb{N}}$ widersprechen würde. Also muss $m \neq 0^{\mathbb{N}}$ sein und somit gibt es nach (i) ein t mit $m = t+1$. Da m minimal ist, gibt es ein $k' \in \omega$ mit

$$\langle\langle n, t\rangle, k'\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Also folgt mit der Definition von $\cdot^{\mathbb{N}}$

$$\langle\langle n, m\rangle, k' +^{\mathbb{N}} n\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Die Eindeutigkeit von k in $\langle\langle n, m\rangle, k\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}$ folgt nun mit den analogen Argumenten wie bei $+^{\mathbb{N}}$.

Nun brauchen wir nur noch zu zeigen, dass ω alle PA-Axiome erfüllt:

- Wir zeigen indirekt, dass PA_0 erfüllt ist, also dass gilt $\forall n(\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n) \neq 0^{\mathbb{N}})$. Sei $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n) = 0$. Dann gilt $n \in n+1$, aber $n \notin \emptyset$. Nach dem Extensionalitätsaxiom gilt also $n+1 \neq 0^{\mathbb{N}}$.
- Auch PA_1 ist wahr, das heisst, es gilt $\forall x \forall y(\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n) = \mathrm{s}^{\mathbb{N}}(m) \to n = m)$:
  Seien $n, m \in \omega$ mit $n \cup \{n\} = \mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n) = \mathrm{s}^{\mathbb{N}}(m) = m \cup \{m\}$, dann folgt aus dem Extensionalitätsaxiom

  $$(n \in m \vee n = m) \wedge (m \in n \vee n = m).$$

  Nach (ii) muss also $n = m$ gelten, da nur genau eine der obigen Beziehungen zwischen n und m erfüllt sein kann.
- PA_2, das heisst $\forall n(n +^{\mathbb{N}} 0^{\mathbb{N}} = n)$, ist per Definition von $+^{\mathbb{N}}$ erfüllt. Analoges gilt auch für $\mathsf{PA}_3, \mathsf{PA}_4$ und PA_5: Dies folgt alles aus den Definitionen von $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}$, $+^{\mathbb{N}}$ und $\cdot^{\mathbb{N}}$.
- Es bleibt zu zeigen, dass PA_6 erfüllt ist, das heisst, dass für jede Formel $\varphi(n)$ in PA, wobei n frei vorkommt in $\varphi(n)$, gilt:

  $$(\varphi(0^{\mathbb{N}}) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n)))) \to \forall x \varphi(x).$$

  Sei φ eine solche Formel. Angenommen es gilt

  $$(\varphi(0^{\mathbb{N}}) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n)))) \wedge \neg \forall x \varphi(x),$$

  dann existiert ein kleinstes $m \in \omega$ mit $\neg\varphi(m)$. Da wir $\varphi(0^{\mathbb{N}})$ haben, ist $m \neq 0^{\mathbb{N}}$. Nach (i) existiert also ein $k \in \omega$ mit $m = k + 1$. Da m minimal ist, muss also $\varphi(k)$ gelten. Mit $\forall n(\varphi(n) \to \varphi(\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(n)))$ folgt somit auch

  $$\varphi(\mathrm{s}^{\mathbb{N}}(k)) = \varphi(k+1) = \varphi(m),$$

  was unserer Annahme widerspricht.