Musterlösung Serie 5

ZUM AUSWAHLAXIOM

---

20. Zeige, dass jede abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar ist und erkläre, wieso im Beweis das Auswahlaxiom (bzw. eine Form davon) benötigt wird.

Bemerkung: In gewissen Modellen von ZF, in denen AC nicht gilt, ist

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} R_n$$

mit R_n abzählbar für alle $n \in \omega$.

Lösung: Sei I eine beliebige abzählbare Indexmenge und $M = \{M_\iota \mid \iota \in I\}$ eine abzählbare Menge von abzählbaren Mengen. Da die M_ι abzählbar sind, existieren für jedes $\iota \in I$ (unendlich viele) Surjektionen $\omega \twoheadrightarrow M_\iota$. Wir wählen nun für jedes $\iota \in I$ eine Surjektion $f_\iota : \omega \twoheadrightarrow M_\iota$. Dafür wird das Auswahlaxiom gebraucht! Definiere $h : I \times \omega \to \bigcup_{\iota \in I} M_\iota$ durch $h(\iota, n) := f_\iota(n)$ für alle $n \in \omega$ und $\iota \in I$. Dann ist h surjektiv, weil die f_ι's es auch sind. Da I ebenfalls abzählbar ist, existiert eine Surjektion $g : \omega \to I$. Wir können nun g erweitern zu $\overline{g} : \omega \times \omega \to I \times \omega$ definiert durch $\overline{g} := g \times id_\omega$ (das heisst $\forall n \forall m \big(\overline{g}(n, m) = (g(n), m)\big)$. Mit einem Diagonalargument (analog zum Beweis, dass $\mathbb{Q}^+$ abzählbar ist) können wir eine Surjektion $k : \omega \to \omega \times \omega$ finden. Nun können wir $f : \omega \to \bigcup_{\iota \in I} M_\iota$ durch $f = h \circ \overline{g} \circ k$ definieren, welches eine Surjektion ist, da es die Funktionen $h, \overline{g}, k$ auch sind. Somit ist $\bigcup_{\iota \in I} M_\iota$ abzählbar.

21. Seien (A) und (B) die folgenden Aussagen:

(A) Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V enthält eine Basis von V.

(B) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Zeige die Aussagen (A) und (B) jeweils

(a) mit dem Kuratowski-Zorn Lemma,

(b) und mit dem Teichmüller Prinzip.

Bemerkung: Die Aussage (A) ist bzgl. den Axiomen $0 – 6$ äquivalent zu AC, und die Aussage (B) ist bzgl. ZF äquivalent zu AC; (A) ist also etwas stärker als (B).

Lösung: Wir beweisen zuerst die Aussage (B).

(a) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Definiere

$$\mathscr{F} := \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhänging}\}.$$

Dann gilt trivialerweise $\emptyset \in \mathscr{F}$, also ist $\mathscr{F}$ nicht leer. Nun definiert $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathscr{F}$. Um das Kuratowski-Zorn Lemma anzuwenden, müssen wir noch zeigen,

dass für jede Kette in $\mathscr{F}$ ein maximales Element in $\mathscr{F}$ bezüglich $\subseteq$ existiert. Sei nun $\mathscr{K} = (X_i)_{i\in I}$ eine solche Kette und I eine beliebige Indexmenge. Offensichtlich ist $S := \bigcup_{i\in I} X_i$ eine obere Schranke für K bezüglich $\subseteq$, da S alle X_i's enthält. Es bleibt zu zeigen, dass S in $\mathscr{F}$ enthalten ist:
Falls $S \notin \mathscr{F}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und Indizes $i_j \in I$, sodass die Vektoren $v_{i_j} \in X_{i_j}$ linear abhängig sind für $j = 1, 2, \ldots, n$. Das heisst, es existieren $k_j \in K$ für $j = 1, 2, \ldots, n$, sodass gilt $\sum_{j=1}^{n} k_j v_{i_j} = 0$. Nun ist aber $\mathscr{K}$ eine Kette. Also sind alle X_{i_j}'s vergleichbar bezüglich $\subseteq$. Das heisst, zum Beispiel gilt $X_{i_1} \subseteq X_{i_2}$ oder $X_{i_2} \subseteq X_{i_1}$. Wendet man dieses Argument induktiv an, dann existiert ein $i^* \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ sodass gilt $X_{i_j} \subseteq X_{i^*}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Dann gilt aber auch $v_{i_j} \in X_{i^*}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und wir erhalten einen Widerspruch, da X_{i^*} per Definition nur linear unabhängige Vektoren enthält.

Somit ist $S \in \mathscr{F}$ und das Kuratowski-Zorn Lemma kann angewandt werden und wir bekommen, dass ein maximales Element $X^* \in \mathscr{F}$ bezüglich $\subseteq$ existiert. Nach Definition von $\mathscr{F}$ ist X^* linear unabhängig und wegen der Maximalität ist X^* erzeugend (Wäre X^* nicht erzeugend, liesse es sich zu einer grösseren linear unabhängigen Menge erweitern.). Somit ist X^* eine Basis von V.

(b) Sei V ein Vektorraum und sei $\mathscr{F}$ definiert wie bei der letzten Teilaufgabe. Dann hat $\mathscr{F}$ endlichen Charakter. Nach dem Teichmüller Prinzip enthält $\mathscr{F}$ also eine maximale Menge M bezüglich Inklusion. Mit denselben Argumenten wie aus der letzten Teilaufgabe lässt sich nun zeigen, dass diese maximale Menge M aus linear unabhängigen Vektoren besteht und V erzeugt. M ist also eine Basis von V.

Um (A) zu beweisen, müssen wir bei der Definition von $\mathscr{F}$ nur den Vektorraum V durch das Erzeugendensystem E ersetzten. Ansonsten können wir die gleichen Beweise von (a) und (b) nochmals verwenden.

22. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

Zeige, dass es eine *lineare Funktion* $f : V \to V$ gibt, welche *nirgends stetig* ist.

Hinweis: Sei $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Basis des Vektorraums V. Definiere $f : V \to V$ mit $f(a_\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Lösung: Nach der obigen Definition ist f durch lineare Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ eindeutig definiert und linear, da $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Basis vom Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass f nirgends stetig ist. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon, \delta > 0$ sowie $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ beliebig. Wir möchten zeigen, dass f nicht stetig ist in x_0. Nun können wir $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ so wählen, dass $|q_1 - q_2| > \varepsilon$ und $|q_1 a_\lambda - q_2 a_{\lambda'}| < \delta$ (beispielsweise können wir die Gleichungen $q_1 - q_2 = 2\varepsilon$ und $q_1 a_\lambda - q_2 a_{\lambda'} = \frac{\delta}{2}$ lösen, um einen konkreten Wert für q_1, q_2 zu erhalten). Wähle nun $x := x_0 - (q_1 a_\lambda - q_2 a_{\lambda'})$, dann ist $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und es gilt

$$|f(x_0) - f(x)| = |f(x_0 - x)| = |q_1 f(a_\lambda) - q_2 f(a_{\lambda'})| > \varepsilon,$$

also ist f in x_0 nicht stetig. Da x_0 beliebig war, ist f somit nirgends stetig.