Musterlösung Serie 6

EIN NICHTSTANDARD-MODELL DER PEANO-ARITHMETIK

---

23. Beweise das Ultrafilter-Theorem mit Hilfe des Teichmüller-Prinzips, und folgere daraus die Existenz von nicht-trivialen Ultrafiltern über ω.

Lösung: Sei $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Filter über einer Menge S. Wir zeigen, dass sich $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ zu einem Ultrafilter erweitern lässt. Definiere

$$\mathscr{E} := \big\{X \subseteq \mathscr{P}(S) : X \cup \mathscr{F} \text{ hat die endliche Durchschnittseigenschaft}\big\},$$

wobei wir sagen, dass eine Menge M die endliche Durchschnittseigenschaft hat, falls nicht-leere endliche Durchschnitte von Elementen aus M nicht leer sind. Damit wir das Teichmüller-Prinzip auf $\mathscr{E}$ anwenden können, müssen wir zeigen, dass $\mathscr{E}$ nicht leer ist und endlichen Charakter hat. Da $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Filter ist, gilt $\mathscr{F} \in \mathscr{E}$ und somit ist $\mathscr{E}$ nicht leer. Zu zeigen bleibt, dass $\mathscr{E}$ endlichen Charakter hat: Seien dazu $X \in \mathscr{E}$ und $Y \subseteq X$ eine beliebige endliche Teilmenge. Dann ist $Y \subseteq \mathscr{P}(S)$ und auch $Y \cup \mathscr{F} \subseteq X \cup \mathscr{F}$, das heisst, $Y \cup \mathscr{F}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, weil es in einer Menge enthalten ist, welche die endliche Durchschnittseigenschaft ebenfalls hat. Somit ist $Y \in \mathscr{E}$. Ist $X \subseteq \mathscr{P}(S)$ mit $X \notin \mathscr{E}$, dann hat $X \cup \mathscr{F}$ nicht die endliche Durchschnittseigenschaft. Somit existiert eine endliche Menge $A \subseteq X$, sodass $A \cup \mathscr{F}$ nicht die endliche Durchschnittseigenschaft hat, d.h. nicht jede endliche Teilmenge von X ist in $\mathscr{E}$.

Mit dem Teichmüller-Prinzip folgt nun, dass $\mathscr{E}$ ein bezüglich Inklusion maximales Element $\mathscr{U}$ hat. Insbesondere ist dann auch $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$, denn offenbar gilt $\mathscr{U} \cup \mathscr{F} \in \mathscr{E}$ und das wäre ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathscr{U}$. Zu zeigen bleibt, dass $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Ultrafilter ist. Es ist $\emptyset \notin \mathscr{U}$ weil sonst $\mathscr{U}$ die endliche Durchschnittseigenschaft nicht hätte. Ausserdem ist $S \in \mathscr{U}$, da $S \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{U}$. Seinen $x, y \in \mathscr{U}$. Es ist $x \cap y \neq \emptyset$ wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft von $\mathscr{U} \cup \mathscr{F}$. Falls nun $x \cap y \notin \mathscr{U}$ oder $x \cup y \notin \mathscr{U}$, dann wäre $\mathscr{U} \cup \{x \cap y\} \in \mathscr{E}$ und $\mathscr{U} \cup \{x \cup y\} \in \mathscr{E}$ und wieder hätten wir einen Widerspruch zur Maximalität von $\mathscr{U}$, also ist $\mathscr{U}$ ein Filter. Ausserdem garantiert die Maximalität von $\mathscr{U}$, dass $\mathscr{U}$ auch ein Ultrafilter ist.

Betrachte nun den Fréchet-Filter über ω. Wäre er trivial, so gäbe es endliche Mengen in diesem. Dies ist aber nicht möglich, denn der Fréchet-Filter enthält nur Mengen, deren Komplement in ω endlich sind. Das heisst, der Fréchet-Filter und dessen Erweiterung nach der obigen Konstruktion kann nicht trivial sein.

Im Folgenden sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ein nicht-trivialer Ultrafilter über ω. Auf der Menge der Funktionen $f : \omega \to \omega$ definieren wir die Äquivalenzrelation "$\sim$" durch

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; \big\{n \in \omega : f(n) = g(n)\big\} \in \mathscr{U}\,.$$

Für jede Funktion $f \in {}^{\omega}\omega$ sei

$$[f] := \{g \in {}^{\omega}\omega : g \sim f\},$$

und sei

$$\omega^* := \big\{[f] : f \in {}^{\omega}\omega\big\}.$$

Wir konstruieren nun die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}^*$ mit Bereich ω^* wie folgt:

- Für das Konstantensymbol $\mathsf{0} \in \mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ sei $f_{\mathsf{0}} \in {}^{\omega}\omega$ definiert durch

$$f_{\mathsf{0}}(n) := 0 \quad \text{für alle } n \in \omega,$$

und sei

$$\mathsf{0}^{\mathbb{N}^*} := [f_{\mathsf{0}}].$$

- Für das 1-stellige Funktionssymbol s in $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ sei $\mathsf{s}(f)$ definiert durch

$$\mathsf{s}(f)(n) := f(n) + 1 \quad \text{für } n \in \omega,$$

und sei

$$\mathsf{s}^{\mathbb{N}^*}\big([f]\big) := [\mathsf{s}(f)].$$

- Für die binären Funktionssymbole $+$ und $\cdot$ in $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$ definieren wir $f + g$ und $f \cdot g$ (für $f, g \in {}^{\omega}\omega$) durch

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &:= f(n) +^{\mathbb{N}} g(n) \quad (\text{für alle } n \in \omega)\,, \\ (f \cdot g)(n) &:= f(n) \cdot^{\mathbb{N}} g(n) \quad (\text{für alle } n \in \omega)\,, \end{aligned}$$

und sei

$$[f] +^{\mathbb{N}^*} [g] := [f+g] \quad \text{und} \quad [f] \cdot^{\mathbb{N}^*} [g] := [f \cdot g].$$

24. (a) Für $k \in \omega$ sei $c_k \in {}^{\omega}\omega$ definiert durch $c_k(n) = k$ für alle $n \in \omega$.
Zeige, dass ein $[g] \in \omega^*$ existiert, sodass für jedes $k \in \omega$ gilt:

$$\mathbb{N}^* \vDash [c_k] < [g]$$

(b) Zeige, dass der Bereich ω^* von $\mathbb{N}^*$ überabzählbar ist.

(c) Zeige: Für alle $[g], [g'] \in \omega^*$ mit $[g] < [g']$ ist die Menge

$$\big\{[f] \in \omega^* : \ [g] \leqslant [f] \leqslant [g']\big\}$$

entweder endlich oder überabzählbar.

Lösung: (a) Sei $k \in \omega$ beliebig. Definiere $g(n) := n$ für alle $n \in \omega$. Da $\mathscr{U}$ ein nichttrivialer Ultrafilter ist, enthält $\mathscr{U}$ keine endlichen Mengen, was wiederum bedeutet, dass $\mathscr{U}$ alle Komplemente von endlichen Mengen enthält (insbesondere enthält $\mathscr{U}$ somit auch den Fréchet-Filter). Das heisst

$$\big\{n \in \omega : c_k(n) < g(n)\big\} = \big\{n \in \omega : k < n\big\} = \omega \backslash \big\{0, 1 \ldots, k\big\} \in \mathscr{U}\,.$$

Also gilt $\mathbb{N}^* \vDash [c_k] < [g]$ für alle $k \in \omega$.

(b) Sei $G := \big\{[g_k] : k \in \omega\big\}$ eine abzählbare Menge von Elementen aus ω^*. Wir konstruieren mit einem Diagonalargument eine Funktion $f : \omega \to \omega$, sodass $[f] \notin G$. Definiere f wie folgt:

$$\begin{aligned} f(0) &:= g_0(0) + 1 \\ f(1) &:= \max\big\{g_0(1),\, g_1(1)\big\} + 1 \\ &\ \ \vdots \\ f(n) &:= \max\big\{g_0(n),\, g_1(n), \ldots,\, g_n(n)\big\} + 1 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Nach Konstruktion haben wir $f(n) > g_k(n)$ für alle $n \geqslant k$. Da $\mathscr{U}$ alle Komplemente von endlichen Mengen enthält, gilt

$$\{n \in \omega : f(n) > g_k(n)\} \in \mathscr{U}$$

für alle $k \in \omega$. Das heisst, es gilt $\mathbb{N}^* \models [f] > [g_k]$ für alle $k \in \omega$ und somit ist $[f] \notin G$.

(c) Sei $[g] < [g']$ und $h : \omega \to \omega$ sodass $[g] + [h] = [g']$. Da $\mathbb{N}^* \models \mathsf{PA}$ und $\mathscr{U}$ ein Filter ist, existiert solch ein h und $[h]$ ist eindeutig. Sei wieder $c_k : \omega \to \omega$ für jedes $k \in \omega$ definiert durch $c_k(n) = k$ für alle $n \in \omega$. Dann gibt es zwei mögliche Fälle:

Fall 1: $\exists M \in \omega\, \exists x \in \mathscr{U}\, \forall i \in x\, \big(h(i) \leqslant M\big)$.

Wir zeigen, dass in diesem Fall $k \in \omega$ existiert mit $0 \leqslant k \leqslant M$, sodass $[h] = [c_k]$, *d.h.*, es gibt ein $y \in \mathscr{U}$, sodass $h(i) = k$ für alle $i \in y$. Um die Behauptung zu beweisen, definiere

$$y_l := \{i \in x : h(i) = l\},$$

für alle $0 \leqslant l \leqslant M$. Dann ist $x = y_0 \dot\cup \cdots \dot\cup y_M$ (*d.h.*, x ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $y_0, \ldots y_M$). Da $x \in \mathscr{U}$ und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter ist, ist entweder $y_0 \in \mathscr{U}$ oder $y_1 \dot\cup \cdots \dot\cup y_M \in \mathscr{U}$. Falls $y_0 \in \mathscr{U}$ ist, dann haben wir $h(i) = 0$ für alle $i \in y_0$. Dies impliziert $[h] = [c_0]$. Ansonsten ist $y_1 \in \mathscr{U}$ oder $y_2 \dot\cup \cdots \dot\cup y_M \in \mathscr{U}$ und wir können gleich vorgehen wie vorher. Nach endlich vielen Schritten finden wir ein $k \in \omega$, wobei $0 \leqslant k \leqslant M$, sodass $[h] = [c_k]$.

Somit haben wir $[g] + [c_k] = [g']$ und da $\mathbb{N}^* \models \mathsf{PA}$, folgt daraus, dass

$$\{[f] \in \omega^* : [g] \leqslant [f] \leqslant [g']\} = \{[g] + [c_l] \in \omega^* : 0 \leqslant l \leqslant k\},$$

wobei dies eine endliche Menge ist.

Fall 2: $\forall M \in \omega\, \forall x \in \mathscr{U}\, \exists i \in x\, \big(h(i) > M\big)$.

Definiere $h_r : \omega \to \omega$ für jede reelle Zahl $r \in [0, 1]$ durch $h_r(n) := \lceil r \cdot h(n) \rceil$, wobei

$$\lceil r \cdot h(n) \rceil := \min \{k \in \omega : k \geqslant r \cdot h(n)\}.$$

Da die Menge der reellen Zahlen $r \in [0, 1]$ überabzählbar ist, reicht es, wenn wir zeigen, dass $[h_r] < [h_s]$ für alle reellen $0 \leqslant r < s \leqslant 1$ gilt. Offensichtlich ist $[h_r] \leqslant [h_s]$ und deshalb brauchen wir nur $[h_r] \neq [h_s]$ zu zeigen, *d.h.*, es gibt kein $x \in \mathscr{U}$ sodass für alle $h_r(i) = h_s(i)$ gilt für alle $i \in x$. Dies zeigen wir per Widerspruch: Sei $x_0 \in \mathscr{U}$ mit $h_r(i) = h_s(i)$ für alle $i \in x_0$. Da $r < s$, finden wir ein $M_0 \in \omega$, sodass

$$r + \frac{1}{M_0} < s.$$

Dann gilt $r \cdot M_0 + 1 < s \cdot M_0$. Nach der Annahme im Fall 2 finden wir ein $j \in x_0$ mit $h(j) > M_0$ und es gilt

$$\begin{aligned} h_s(j) - h_r(j) &= \lceil s \cdot h(j) \rceil - \lceil r \cdot h(j) \rceil \\ &= \lceil \underbrace{s \cdot M_0}_{> r \cdot M_0 + 1} + \underbrace{s \cdot (h(j) - M_0)}_{> r \cdot (h(j) - M_0)} \rceil - \lceil r \cdot M_0 + r \cdot (h(j) - M_0) \rceil \\ &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Also ist $h_s(j) \neq h_r(j)$ für $j \in x_0$, was ein Widerspruch zur obigen Annahme ist.

Nun gilt $[g] \leqslant [g] + [h_r] \leqslant [g']$ für jedes reelle $r \in [0,1]$ und dies zeigt, dass

$$\big\{[f] \in \omega^* :\ [g] \leqslant [f] \leqslant [g']\big\} \supseteq \big\{[g] + [h_r] \in \omega^* : 0 \leqslant r \leqslant 1\big\}$$

eine überabzählbare Menge ist.