Musterlösung Serie 7

NICHTSTANDARD-ANALYSIS

---

25. Bestimme $\sin'(x_0)$ mithilfe von Nichtstandard-Analysis.

Hinweis: Man kann das Additionstheorem verwenden.

Lösung: Sei ε infinitesimal, so folgt mit Proposition 7.2. (b)

$$\sin'(x_0) = \operatorname{st}\left(\frac{\sin(x_0+\varepsilon)-\sin(x_0)}{\varepsilon}\right).$$

Wir können nun das Additionstheorem auf $\sin(x_0+\varepsilon)$ anwenden und erhalten

$$\sin(x_0+\varepsilon) = \sin(x_0)\cos(\varepsilon) + \cos(x_0)\sin(\varepsilon).$$

Offensichtlich ist die Standardteil-Funktion $\mathbb{R}$-linear ist. Daraus folgt

$$\operatorname{st}\left(\frac{\sin(x_0+\varepsilon)-\sin(x_0)}{\varepsilon}\right) = \sin(x_0)\operatorname{st}\left(\frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon}\right) + \cos(x_0)\operatorname{st}\left(\frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon}\right).$$

Wir können nun die Potenzreihen von $\sin(\varepsilon)$ und $\cos(\varepsilon)$ verwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n}}{(2n)!}-1}{\varepsilon} = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}^{\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n-1}}{(2n)!}\\ \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} &= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\varepsilon} = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Da $\operatorname{st}(\varepsilon^n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, folgt daraus sofort, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{st}\left(\frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon}\right) &= 0\\ \operatorname{st}\left(\frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) &= 1\end{aligned}$$

und somit bekommen wir schliesslich

$$\sin'(x_0) = \cos(x_0).$$

Alternativ ist es auch möglich, direkt die Potenzreihen von $\sin(x_0+\varepsilon)$ und $\sin(x_0)$ zu verwenden. Dann benötigt man kein Additionstheorem. Als Resultat erhält man die Potenzreihe von $\cos(x_0)$.

26. **Die Regel von Bernoulli-de L'Hospital**:

Beweise die folgende Aussage mithilfe von Nichtstandart-Analysis: Seien f und g zwei reellwertige Funktionen, die bei $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, wobei $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ist. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Lösung: Sei ε infinitesimal, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)}{g(x_0+\varepsilon)}\right).$$

Da $f(x_0) = 0$, ist

$$\operatorname{st}\big(f(x_0+\varepsilon)\big) = \operatorname{st}\big(f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)\big)$$

und dasselbe gilt auch für g. Somit erhalten wir:

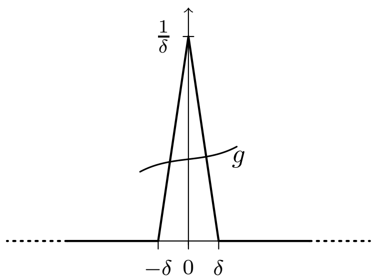
$$\begin{aligned}
\operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)}{g(x_0+\varepsilon)}\right) &= \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)}\right) \\
&= \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&= \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)}\right) \\
&= \operatorname{st}\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}\right) \cdot \operatorname{st}\left(\frac{\varepsilon}{g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)}\right)
\end{aligned}$$

Mit Proposition 7.2.(b) im Skript gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

27. **Die Dirac Delta-Funktion**: Sei g eine reellwertige Funktion, die bei 0 stetig ist und sei δ positiv infinitesimal. Bezüglich δ definieren wir die Funktion

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\delta^2} + \frac{1}{\delta} & \text{for } -\delta < x \leqslant 0, \\ -\frac{x}{\delta^2} + \frac{1}{\delta} & \text{for } 0 < x < \delta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



Zeige, dass dann $\operatorname{st}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_\delta(x)\,dx\right) = g(0)$ gilt.

Lösung: Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_\delta(x)\,dx = \int_{-\delta}^{\delta} g(x) \cdot f_\delta(x)\,dx$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(x)\,dx &= \int_{-\delta}^{0} \frac{x}{\delta^2}+\frac{1}{\delta}\,dx + \int_{0}^{\delta} -\frac{x}{\delta^2}+\frac{1}{\delta}\,dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2\delta^2}+\frac{x}{\delta}\right]_{-\delta}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2\delta^2}+\frac{x}{\delta}\right]_{0}^{\delta}\\ &= 0-\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)-0=1.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass g auf dem ganzen Intervall $[-\delta,\delta]$ stetig ist. Seien dazu $x_0 \in [-\delta,\delta]$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da g in 0 stetig ist, existiert ein $\rho > 0$, sodass für alle $x \in (-\rho,\rho)$ gilt $|g(x)-g(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-2\delta, 2\delta)$ beliebig. Da δ infinitesimal ist und $\rho > 0$, gilt auch $\rho > 2\delta$, also $(-2\delta,2\delta) \subset (-\rho,\rho)$ und somit sind $x_0, x \in (-\rho,\rho)$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|g(x_0)-g(x)| \leqslant |g(x_0)-g(0)| + |g(0)-g(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das heisst, g ist in x_0 stetig und da $x_0 \in [-\delta,\delta]$ beliebig war, ist g auf dem ganzen Intervall $[-\delta,\delta]$ stetig.

Aus der Standardanalysis wissen wir, dass Funktionen, die auf einem beschränkten Intervall stetig sind, dort ihr Maximum und Minimum annehmen. Das heisst, es existieren $\delta_{min}, \delta_{max} \in [-\delta,\delta]$, sodass $g(\delta_{min}) \leqslant g(y) \leqslant g(\delta_{min})$ gilt für alle $y \in [-\delta,\delta]$.

Da f_δ nicht-negativ ist, gilt

$$g(\delta_{min}) \cdot f_\delta(x) \leqslant g(x)\cdot f_\delta(x) \leqslant g(\delta_{max}) \cdot f_\delta(x)$$

für alle $x \in [-\delta,\delta]$. Wir können den Wert des Integrals nun nach oben und nach unten abschätzen:

$$g(\delta_{min}) = g(\delta_{min}) \int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(x)\,dx \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} g(x)\cdot f_\delta(x)\,dx \leqslant g(\delta_{max}) \int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(x)\,dx = g(\delta_{max})$$

Mit Proposition 7.2. (a) erhalten wir

$$g(0) = \operatorname{st}\left(g(\delta_{min})\right) \leqslant \operatorname{st}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\cdot f_\delta(x)\,dx\right) \leqslant \operatorname{st}\left(g(\delta_{max})\right) = g(0)$$

und daraus folgt

$$\operatorname{st}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\cdot f_\delta(x)\,dx\right) = g(0).$$

Beachte, dass wir all die Sätze der Analysis auch in der Nichtstandartanalysis einsetzten dürfen, weil in beiden Modellen die gleichen Sätze gelten.