Musterlösung Serie 8

Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann ist G **kreisfrei**, wenn G keine Kreise (d.h. keine geschlossene Kantenzüge) enthält. G ist ein **Baum**, wenn G zusammenhängend und kreisfrei ist.

28. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist kreisfrei, aber wenn wir eine neue Kante hinzufügen, so entsteht ein Kreis.

(c) G enthält keine Schlingen und für beliebige zwei Knoten a, b (mit $a \neq b$) gibt es genau einen Kantenzug von a nach b.

(d) G ist zusammenhängend, aber wenn wir irgendeine Kante löschen, so ist G unzusammenhängend.

Lösung:

(a) $\Rightarrow$ (b) Da G ein Baum ist, ist G per Definition kreisfrei. Wir zeigen, dass ein Kreis entsteht, wenn wir eine neue Kante $\{a, b\} \notin E$ mit $a, b \in V$ hinzufügen. Wenn $a = b$ ist, dann erhalten wir trivialerweise eine Schlinge, die ebenfalls einem Kreis entspricht. Wir können also annehmen, dass $a \neq b$ gilt. Da G als Baum zusammenhängend ist, finden wir einen Weg in G, welcher a mit b verbindet und die Kante $\{a, b\}$ nicht enthält. Erweitern wir nun diesen Weg mit der Kante $\{a, b\}$, dann haben wir einen Kreis.

(b) $\Rightarrow$ (c) Da G kreisfrei ist, gibt es keine Schlingen in G. Wir zeigen nun, dass es für zwei beliebige Knoten $a, b \in V$ mit $a \neq b$ genau einen Kantenzug von a nach b gibt. Falls $\{a, b\} \in E$, dann gibt es über diese Kante einen Weg von a nach b. Falls $\{a, b\} \notin E$, dann existiert nach Annahme ein Kreis in G, wenn wir diese Kante hinzufügen. Das heisst, wir finden in G immer einen Weg von a nach b. Dieser muss eindeutig sein, denn sonst können wir die beiden Wege verbinden und wir erhalten einen Kreis in G, was ein Widerspruch ist zur Annahme, dass G kreisfrei ist.

(c) $\Rightarrow$ (d) Mit (c) finden wir zwischen allen Knoten in G einen Weg, also ist G zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass G unzusammenhängend wird, wenn wir eine Kante entfernen. Seien dazu $a, b \in V$ mit $\{a, b\} \in E$. Da der Weg von a nach b eindeutig ist, gibt es von a nach b nur den Weg über diese Kante. Würde man diese entfernen, so wären a und b nicht mehr über einen Weg verbunden und somit wäre der daraus resultierende Graph unzusammenhängend.

(d) $\Rightarrow$ (a) Nach Annahme ist G zusammenhängend, also bleibt zu zeigen, dass G auch kreisfrei ist. Angenommen es gäbe einen Kreis in G, dann würde das entfernen einer Kante dieses Kreises nicht dazu führen, dass Knoten in G nicht mehr zusammenhängend wären. Dies würde der Annahme (d) widersprechen. Somit muss G ein Baum sein.

29. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter und nicht-leerer Graph. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.

(c) G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.

Lösung: Für den Beweis verwenden wir die folgenden beiden Hilfssätze:

Lemma 1. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht-leerer, ungerichteter und zusammenhängender Graph. Dann ist $|E| \geqslant |V| - 1$.*

Proof. Wir verwenden Induktion über $|V|$. Der Fall $|V| = 1$ ist klar, da $|E| \geqslant 0$. Sei nun $|V| > 1$. Offenbar hat jeder Knoten in G mindestens Grad eins, da G sonst nicht zusammenhängend sein kann. Falls jeder Knoten mindestens Grad zwei hat, dann stimmt die Aussage, da es in diesem Fall mindestens $|V|$ Kanten geben muss in G. Ansonsten existiert $x \in V$ mit $\deg(x) = 1$. Sei $k \in E$ die Kante, welche x mit einem anderen Knoten aus V verbindet. Betrachte nun $V' := V \backslash \{x\}$, $E' := E \backslash \{k\}$ und setzte $G' := (V', E')$. Da G zusammenhängend ist und $\deg(x) = 1$ gilt, ist G' auch zusammenhängend. Ausserdem gilt $|V'| = |V| - 1$, also können wir die Induktionsannahme auf G' anwenden und bekommen $|E'| \geqslant |V'| - 1 = |V| - 2$. Also ist $|E| = |E'| + 1 \geqslant |V| - 1$ und die Aussage folgt nun mit Induktion. □

Lemma 2. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht-leerer, ungerichteter und kreisfreier Graph. Dann ist $|E| \leqslant |V| - 1$.*

Proof. Wir verwenden wieder Induktion. Der Fall $|V| = 1$ ist klar, da es dann in G keine Kante geben kann. Sei also $|V| > 1$. Wir gehen zuerst davon aus, dass G zusammenhängend ist. Betrachte eine beliebige Kante $\{a, b\} \in E$ für $a, b \in V$ und $a \neq b$. Entfernen wir diese Kante aus E, so muss es genau zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten $A, B \subseteq G$ geben mit $a \in V_A$ und $b \in V_B$ und $V = V_A \cup V_B$, weil G kreisfrei ist. Seien E_A und E_B die disjunkten Teilmengen von E, welche die Kanten zwischen Punkten von A beziehungsweise von B enthalten. Es muss nun gelten, dass $E = E_A \cup E_B \cup \{a, b\}$ so disjunkt zerlegt werden kann. Betrachtet man die Graphen $G_A := (V_A, E_A)$ und $G_B := (V_B, E_B)$, dann sind die beiden Graphen ebenfalls kreisfrei, wobei $0 < |V_A|, |V_B| < |V|$. Wenden wir die Induktionsannahme auf G_A und G_B an, so erhalten wir, dass $|E_A| \leqslant |V_A| - 1$ und $|E_B| \leqslant |V_B| - 1$. Insgesamt bekommen wir

$$|E| = |E_A| + |E_B| + 1 \leqslant (|V_A| - 1) + (|V_B| - 1) + 1 = |V| - 1.$$

Nehmen wir nun an, dass G nicht unbedingt zusammenhängend ist. Dann können wir G in endlich viele disjunkte zusammenhängende Teilgraphen unterteilen: Wir finden $k \in \mathbb{N}$, sodass $V = \bigcup_{i=0}^{k} V_i$ und $E = \bigcup_{i=0}^{k} E_i$, wobei diese Zerlegungen jeweils disjunkt sind. Betrachten wir nun die zusammenhängenden Graphen $G_i := (V_i, E_i)$ für $i = 0, \ldots, k$, dann sind diese Teilgraphen von G ebenfalls kreisfrei, weil G es auch ist. Wir können nun den oben gezeigten Fall auf die einzelnen G_i's anwenden und erhalten

$$|E| = \sum_{i=0}^{k} |E_i| \leqslant \sum_{i=0}^{k} (|V_i| - 1) = |V| - (k + 1) \leqslant |V| - 1.$$

□

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei G ein Baum, dann ist G per Definition kreisfrei und zusammenhängend. Durch Anwendung der beiden obigen Sätzen, Lemma 1 und Lemma 2, bekommen wir schliesslich, dass G genau $n-1$ Kanten hat.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei G kreisfrei mit $n-1$ Kanten. Angenommen G wäre nicht zusammenhängend, dann wäre G kein Baum und deshalb ist die Aussage 27 (b) falsch für G. Das heisst, wir können eine Kante finden und diese zu G hinzufügen, ohne dass ein Kreis entsteht. Der neue Graph hat dann n Knoten und Kanten und ist kreisfrei. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 2. Somit muss G zusammenhängend sein.

(c) $\Rightarrow$ (a) Angenommen G ist zusammenhängend und hat $n-1$ Kanten. Wir zeigen, dass G ein Baum sein muss. Falls nicht, dann würde 27 (d) nicht gelten. Das heisst, wir können eine Kante in G entfernen, ohne dass der daraus resultierende Graph unzusammenhängend wird. Dies wäre dann aber ein Widerspruch zu Lemma 1, also ist G ein Baum.

30. Beweise den folgenden SATZ VON CAYLEY für nicht-leere Graphen: Es gibt n^{n-2} verschiedene Bäume mit n festgelegten Knoten.

Hinweis: Sei $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Knotenmenge und sei $T = (V, E)$ ein Baum. Sei b_1 der Endkoten (Knoten mit Grad 1) mit kleinster Nummer und a_1 der mit b_1 adjazente Knoten. Entferne den Knoten b_1 und die Kante (a_1, b_1). Der Restgraph ist wieder ein Baum. Fahre so fort bis nur noch eine Kante übrig bleibt. Zu zeigen ist, dass eine Bijektion zwischen den Bäumen $T = (V, E)$ und den $(n-2)$-Tupeln $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$ existiert.

Lösung: Für den Beweis benutzen wir Induktion über $|V|$. Im Fall $n = 1, 2$ gibt es offensichtlich nur einen Baum und die Formel ist erfüllt. Sei nun $n > 2$ und gelte die Aussage bereits für alle Knotenmengen, welche kleiner sind als n. Sei nun f die Funktion, welche einen Baum nach den Regeln des obigen Algorithmus auf Tupel wie oben beschrieben abbildet und sei $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle \in V^{n-2}$ ein beliebiges $(n-2)$-Tupel. Wir müssen zeigen, dass genau ein Baum T existiert, sodass $f(T) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle \in V^{n-2}$ gilt.
Wir zeigen zuerst, dass die Knoten in $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$ genau den Knoten entsprechen, welche nicht Endknoten im Baum T sind. Beachte zuerst, dass es in einem Baum keine Knoten mit Grad 0 oder Kreise gibt. Somit sind alle Knoten in T entweder Endknoten oder sie haben mindestens zwei Nachbarknoten. Falls ein Endknoten in $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$ wäre, dann müsste sein einziger Nachbarknoten vor ihm entfernt werden und wir hätten einen isolierten Knoten. Beim obigen Algorithmus kann dies aber unmöglich passieren. Umgekehrt wird bei einem Knoten mit mindestens zwei Nachbarknoten irgendwann einer von den beiden entfernt und die Zahl des Knotens landet in $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$. Es ist nicht möglich, dass der Knoten selbst vorher entfernt wird.
Somit ist der Endknoten, welcher zuerst aus T entfernt wird, gerade das minimale Element in $V \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$. Sei $v \in V$ dieses minimale Element, dann hat v immer a_1 als einziger Nachbarknoten in jedem Baum T für den gilt $f(T) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$. Wir wenden nun die Induktionsannahme auf die Menge $V \backslash \{v\}$ an, dann gibt es genau einen einzigen Baum T' mit $f(T') = \langle a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$. Ergänzen wir diesen Baum T' zu T, indem wir v als Knoten und $\{v, a_1\}$ als Kante hinzufügen, so gilt $f(T) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} \rangle$ und T muss nach den obigen Argumenten eindeutig sein. Die Aussage folgt nun mit dem Induktionsaxiom.