Musterlösung Serie 9

Die chromatische Zahl

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlingenfreier, endlicher oder unendlicher Graph und sei $n \in \omega$ mit $n \geqslant 1$. Dann ist G **n-färbbar**, wenn es eine Funktion $\chi_n : V \to n$ gibt, sodass für alle $\{x, y\} \in E$ gilt $\chi_n(x) \neq \chi_n(y)$. Weiter sei

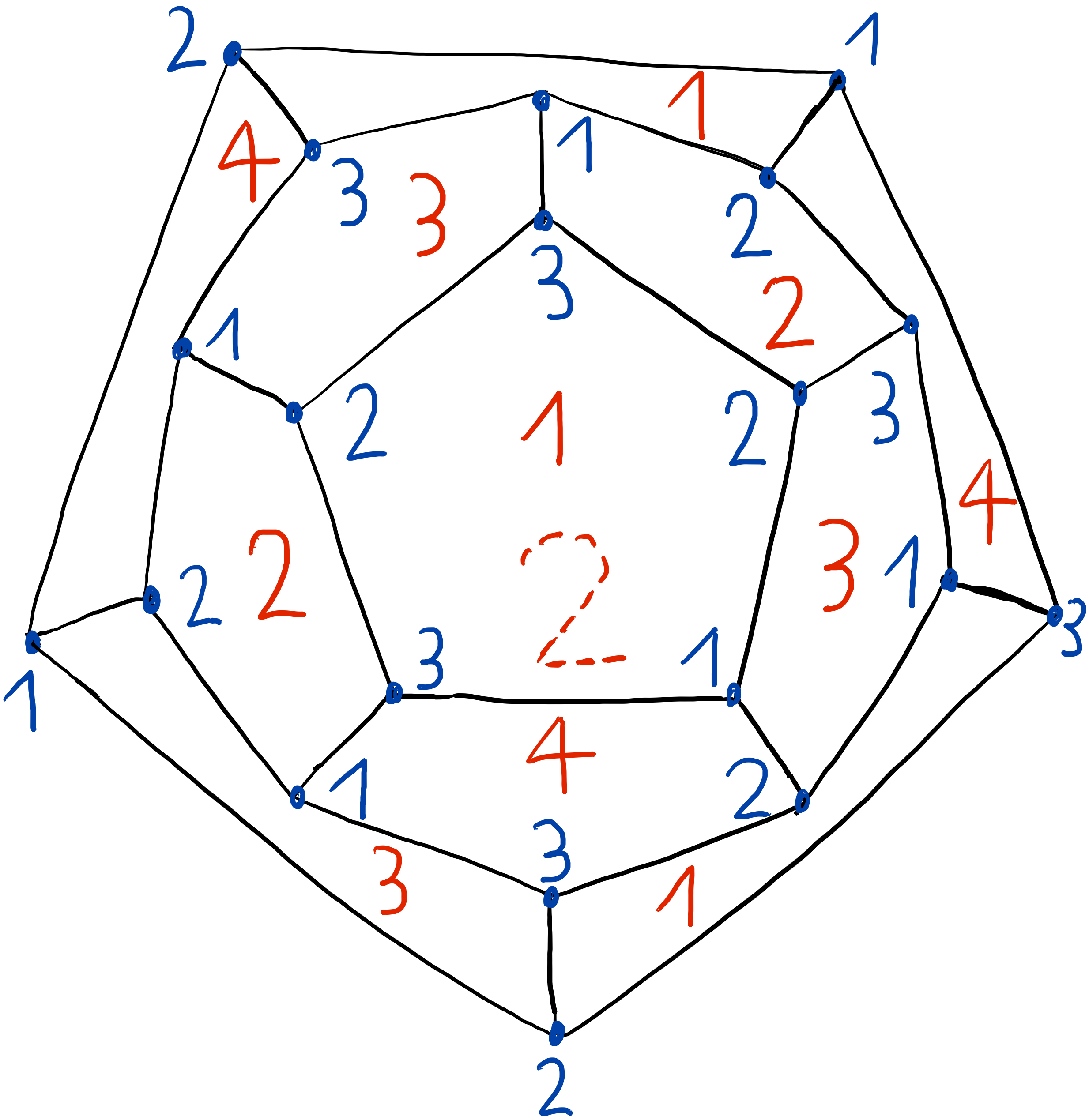
$$\chi(G) := \min \{n \in \omega : G \text{ ist } n\text{-färbbar}\}$$

die **chromatische Zahl** des Graphen G.

31. Bestimme jeweils die chromatische Zahl der Kantengraphen der fünf platonischen Körper *Tetraeder*, *Würfel*, *Oktaeder*, *Dodekaeder* und *Ikosaeder*.

Lösung: Da alle 4 Ecken eines Tetraeders miteinander verbunden sind, müssen alle Knoten des Tetraeders eine andere Farbe haben, damit wir eine “gültige” Färbung erhalten. Das heisst, die chromatische Zahl des Tetraeders ist 4.
Man sieht sehr schnell, dass der Würfel 2-färbbar ist. Denn beim Würfel gibt es keine Kreise mit einer ungeraden Anzahl von Kanten (siehe Aufgabe 31 (c)). Man bekommt seine 2-Färbung, indem man für einen beliebigen Knoten eine von zwei Farben wählt und jeweils alle seine Nachbarknoten dieselbe andere Farbe bekommen. Wenn man nun die Nachbarknoten von Knoten mit einer anderen Farbe färbt, dann erhält man schliesslich eine 2-Färbung des Würfels. Die chromatische Zahl des Würfels ist also 2.
Beim Oktaeder brauchen wir mindestens 3 Farben, um die Ecken zu färben, da Dreiecke, also Kreise von ungerader Anzahl Kanten, auf dem Oktaeder enthalten sind. Man kann nun 3 Farben wählen und die gegenüberliegenden Knoten mit derselben Farbe färben. Die chromatische Zahl des Oktaeders ist somit 3.
Beim Dodekaeder gibt es Kreise, welche aus Fünfecken bestehen. Wir brauchen also mindestens 3 Farben, um ihn zu Färben. Tatsächlich existiert so eine Färbung, deshalb ist die chromatische Zahl des Dodekaeders 3.
Da der Dodekaeder und der Ikosaeder zueinander dual sind, können wir die chromatische Zahl des Ikosaeders bestimmen, indem wir die Flächen des Dodekaeders so färben, dass aneinander grenzende Flächen nicht dieselbe Farbe haben. Betrachtet man eine Fläche des Dodekaeders, so sieht man, dass diese von 5 Flächen umgeben ist, welche einen Kreis bilden. Da dieser Kreis aus einer ungeraden Anzahl von Flächen besteht, brauchen wir mindestens 3 Farben, um den Kreis zu färben sowie eine weitere, um die Fläche zu färben, welche an die Felder des Kreises angrenzt. Somit muss die chromatische Zahl des Ikosaeders mindestens 4 betragen. Tatsächlich lässt sich auch zeigen, dass sie genau 4 ist, wie man im Bild unten sehen kann.

Erklärung zum Bild: Das Bild unten zeigt ein Kantennetz eines Dodekaeders, wobei jedes Fünfeck dieses Netzes einer Fläche des Dodekaeders entspricht. Die blauen Zahlen entsprechen einer Knotenfärbung und die roten einer Flächenfärbung (die gestrichelte 2 steht für die Fläche, welche dem grossen Fünfeck entspricht) eines Dodekaeders. Zwei Knoten grenzen aneinander, wenn sie durch eine Kante verbunden sind und zwei Flächen grenzen aneinander, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Dabei verbinden die äussersten Kanten die Fünfecke am Rand mit dem grossen Fünfeck.



32. (a) Ein Graph $G = (V, E)$ heisst **bipartit** falls V geschrieben werden kann als disjunkte Vereinigung von zwei Mengen U und W, sodass für jede Kante $\{x, y\} \in E$ gilt:

$$|\{x, y\} \cap U| = |\{x, y\} \cap W| = 1$$

Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann 2-färbbar ist, wenn er bipartit ist.

(b) Zeige, dass jeder Baum 2-färbbar ist.

(c) Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann 2-färbbar ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.

Lösung:

(a) Sei der Graph $G = (V, E)$ 2-färbbar, dann existiert eine Funktion $\chi_2 : V \to 2$ mit $\chi_2(x) \neq \chi_2(y)$ für alle $\{x, y\} \in E$. Definiere $V_i := \chi_2^{-1}[i]$ für $i = 0, 1$, dann ist $V = V_0 \cup V_1$ eine disjunkte Zerlegung der Knoten, wobei es nach der Definition von χ_2 keine Kanten in E geben kann, deren Knoten beide entweder zu V_0 oder V_1 gehören. Somit muss G bipartit sein.

Umgekehrt haben wir einen bipartiten Graphen $G = (V, E)$ und zwei disjunkte Knotenmengen V_0, V_1, sodass $V = V_0 \cup V_1$ und keine Kante zwischen zwei Knoten in V_0 oder V_1 existiert. Wir können die Funktion $\chi_2 : V \to 2$ definieren durch

$$\chi_2(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v \in V_0 \\ 1 & \text{falls } v \in V_1 \end{cases}.$$

Für $\{x, y\} \in E$ gilt nun $\chi_2(x) \neq \chi_2(y)$, also ist G 2-färbbar.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Baum und sei $v_0 \in V$ beliebig. Da es in einem Baum nach Aufgabe 27 (c) zwischen allen Knoten in V genau einen Weg gibt, können wir eine Funktion $d_{v_0} : V \to n$ definierten, wobei uns die Zahl $d_{v_0}(v)$ sagt, aus wie vielen Kantenzügen der Weg von v_0 bis zu einem beliebigen $v \in V$ besteht. Daraus lässt sich nun eine weitere Funktion $\chi_2 : V \to 2$ definieren durch

$$\chi_2(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 2 \mid d_{v_0}(v) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $\{x, y\} \in E$ müssen wir nun noch zeigen, dass $\chi_2(x) \neq \chi_2(y)$ gilt. Ohne Einschränkung gilt $d_{v_0}(x) \leqslant d_{v_0}(y)$. Dann führt der Weg von v_0 zu y über die Kante $\{x, y\} \in E$, da die Wege in G zwischen allen Punkten eindeutig sind. Das heisst, es gilt $d_{v_0}(y) = d_{v_0}(x) + 1$ und somit ist genau einer der beiden Distanzen durch 2 teilbar, während die andere es nicht ist und G ist 2-färbbar.

(c) Angenommen ein Graph $G = (V, E)$ besitzt Kreise ungerader Längen, dann lassen sich diese nicht mit zwei Farben färben, ohne dass mindestens zwei benachbarte Knoten dieselbe Farbe haben. Somit ist auch der ganze Graph G nicht 2-färbbar.

Wir nehmen nun an, dass ein Graph G keine ungeraden Kreise besitzt. Sei I eine Indexmenge und $(V_i)_{i \in I}$ eine disjunkte Zerlegung der Knoten von G in seine Zusammenhangskomponenten. Wähle nun genau ein $v_i \in V_i$ für jedes $i \in I$. Betrachte die Funktion $\chi_2 : V \to 2$, wobei für jedes $v \in V$ gilt $\chi_2(v) = 0$, falls ein Weg von einem der v_i's zu v existiert, welcher aus einer geraden Anzahl von Kanten besteht und sonst sei $\chi_2(v) = 1$. Da keine ungeraden Kreise in G existieren, muss dann sogar jeder Weg von einem bestimmten v_i zu v einer geraden Anzahl von Kanten entsprechen. Umgekehrt besteht jeder solche Weg aus einer ungeraden Anzahl von Kanten, wenn $\chi_2(v) = 1$ ist. Sei nun $\{x, y\} \in E$ beliebig, dann hat genau einer dieser Knoten einen Weg zu einem v_i, welcher aus einer geraden Anzahl von Kanten besteht. Somit gilt $\chi_2(x) \neq \chi_2(y)$ und dies beweist, dass G 2-färbbar ist.

33. Sei $G_+^\times = (V, E)$ der Graph der *paarweisen Summen und Produkte*, der wie folgt definiert ist:

$$V := \omega \backslash \{0\} \quad \text{und} \quad E := \big\{\{a,b\} \subseteq V : a \neq b \wedge \exists x, y \in \omega \,(x + y = a \ \wedge\ x \cdot y = b)\big\}$$

(a) Zeige: $\chi(G_+^\times) \geqslant 3$.

(b) Sei $G_+^\times|_{\geqslant m}$ der Graph $G_+^\times$ eingeschränkt auf die Knotenmenge $V' = V \backslash m$.
Zeige: Für alle $m \in \omega$ ist $\chi\big(G_+^\times|_{\geqslant m}\big) \geqslant 3$.

Bemerkung: Inzwischen ist bekannt, dass $\chi(G_+^\times) = \infty$ ist.

Lösung:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} 2 + 4 &= 6 & \qquad 2 \cdot 4 &= 8 \\ 1 + 6 &= 7 & 1 \cdot 6 &= 6 \\ 1 + 7 &= 8 & 1 \cdot 7 &= 7 \end{aligned}$$

und somit bilden $6, 7, 8$ ein Dreieck in $G_+^\times$. Daher brauchen wir mindestens drei Farben um die Ecken von $G_+^\times$ zu färben. Es muss somit gelten $\chi(G_+^\times) \geqslant 3$.

(b) Sei $m \in \omega \backslash \{0\}$ beliebig und n eine natürliche Zahl mit $n > m$. Dann bilden die Terme $2n, n^2 - 1, n^2$ ein Dreieck in $G_+^\times|_{\geqslant m}$, denn es gilt

$$\begin{aligned} n + n &= 2n & \qquad n \cdot n &= n^2 \\ (n-1) + (n+1) &= 2n & (n-1) \cdot (n+1) &= n^2 - 1 \\ 1 + \big(n^2 - 1\big) &= n^2 & 1 \cdot \big(n^2 - 1\big) &= \big(n^2 - 1\big) \end{aligned}$$

und somit folgt schliesslich $\chi\big(G_+^\times|_{\geqslant m}\big) \geqslant 3$.

Man kann sich beispielsweise auch fragen, ob es Dreiecke mit beliebig grossen Knoten und Abständen zwischen den Knoten in $G_+^\times$ gibt. Auch das ist der Fall, was man bei den Zahlen

$$4\,(2n+1)\,, 4\,(4n+1)\,, 3\,(n+1)\,(5n+1)$$

für $n \in \mathbb{N}$ gross genug schnell sieht:

$$\begin{aligned} 2 + 2\,(4n+1) &= 4\,(2n+1) & \qquad 2 \cdot 2\,(4n+1) &= 4\,(4n+1) \\ 3\,(n+1) + (5n+1) &= 4\,(2n+1) & 3\,(n+1) \cdot (5n+1) &= 3\,(n+1)\,(5n+1) \\ 3\,(5n+1) + (n+1) &= 4\,(4n+1) & 3\,(5n+1) \cdot (n+1) &= 3\,(n+1)\,(5n+1) \end{aligned}$$

Falls weiteres Interesse am Graphen $G_+^\times$ besteht, so lohnt es sich einen Blick auf das folgende Paper von Lorenz Halbeisen zu werfen: `https://people.math.ethz.ch/~halorenz/publications/pdf/cork.pdf`. Dort wird unter anderem gezeigt, warum $\chi(G_+^\times) \geqslant 4$ gilt.