Musterlösung Serie 12

DIE MÖBIUSFUNKTION

Für eine Folge $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ von Zahlen $a_n \in \mathbb{Z}$ sei $A(s)$ die formale Reihe

$$A(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

42. Zeige, dass für zwei Folgen $A = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ und $B = (b_l)_{l=1}^{\infty}$ gilt:

$$A(s) \cdot B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{kl=n} a_k\, b_l}{n^s}$$

Lösung: Mit dem Distributivitätsgesetz können wir das Produkt wie folgt schreiben:

$$A(s) \cdot B(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k^s} \cdot B(s) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k^s} \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{l^s} \right) \right) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_k b_l}{(kl)^s} \right) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{a_k b_l}{(kl)^s}$$

Daraus erhalten wir, dass wenn wir die Produkte $a_k b_l$ mit $kl = n$ zusammen nehmen, die gewünschte Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{kl=n} a_k\, b_l}{n^s}.$$

Sei $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die *Riemann'sche Zetafunktion* und für natürliche Zahlen $n \geqslant 1$ sei die *Möbiussequenz* $\mu(n)$ wie folgt definiert:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } p^2 \mid n \text{ für eine Primzahl } p, \\ (-1)^{t_n} & \text{falls } n = p_1 \cdots p_{t_n} \text{ für paarweise verschiedene Primzahlen } p_i. \end{cases}$$

Weiter sei

$$M(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

die *Möbiusfunktion*.

43. Zeige:
$$M(s) \cdot \zeta(s) = 1$$

Lösung: Beachte, dass für die Folge $B = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $b_n = 1$ (für alle n) gilt $B(s) = \zeta(s)$.

Wir möchten den Koeffizienten a_n, $n > 1$, von $\frac{1}{n^s}$ im Produkt $M(s) \cdot \zeta(s) =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ explizit berechnen. Wir nehmen an, dass gilt $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ mit $k_1, \ldots, k_m > 0$ und paarweise verschiedenen Primzahlen p_i. Aus Aufgabe 47 erhalten wir $a_n = \sum_{t|n} \mu(t)$. Jetzt bemerken wir, dass $\mu(t) \neq 0$ mit $t \mid n$ genau dann gilt, wenn $t = \prod_{i \in S} p_i$ mit $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Für $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und $t_S := \prod_{i \in S} p_i$ ist $\mu(t_S) = 1$ für $|S|$ gerade, und $\mu(t_S) = -1$ für $|S|$ ungerade. Da die Anzahl der r-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, m\}$ gleich $\binom{m}{r}$ ist, erhalten wir
$$a_n = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0^m = 0.$$
Beachte, dass gilt $(a-b)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} a^{m-r} b^r$. Daraus folgt, dass $a_n = 0$ für alle $n > 1$, und weil $a_1 = 1$ ist (was einfach zu sehen ist), gilt $M(s) \cdot \zeta(s) = 1$.

44. Seien $f, g : \mathbb{N} \backslash \{0\} \to \mathbb{Z}$ zwei Funktionen für die gilt:
$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

Zeige, dass dann gilt:
$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(\tfrac{n}{d})$$

Hinweis: Für $F = (f(n))_{n=1}^{\infty}$ und $G = (g(n))_{n=1}^{\infty}$ gilt $F(s) = \zeta(s) \cdot G(s)$.

Lösung: Die Gleichung $F(s) = \zeta(s) \cdot G(s)$ folgt direkt aus Aufgabe 47. Multiplizieren wir nun beide Seiten mit $M(s)$, dann erhalten wir mit Aufgabe 48
$$M(s) \cdot F(s) = \zeta(s) \cdot G(s) \cdot M(s) = G(s).$$

Mit Aufgabe 47 ist nun $M(s) \cdot F(s) = G(s)$ gleichbedeutend mit der Gleichung
$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(\tfrac{n}{d})$$

was zu zeigen war.