5. Das Auswahlaxiom

1904 (und dann nochmals 1907) hat Ernst Zermelo bewiesen, dass sich jede Menge *wohlordnen* lässt. (Zur Erinnerung: Eine Wohlordnung auf einer Menge A ist eine lineare Ordnung $<$ bei der jede nicht-leere Menge $S \subseteq A$ bezüglich $<$ ein minimales Element hat.) Für die Beweise benutzte Zermelo beide Male ein nicht-konstruktives Prinzip, das sogenannte *Auswahlaxiom*.

9. Auswahlaxiom.

$$\forall \mathscr{F} \Big(\emptyset \notin \mathscr{F} \to \exists f \Big(f \in {}^{\mathscr{F}}\bigcup \mathscr{F} \wedge \forall x \in \mathscr{F} \big(f(x) \in x \big) \Big) \Big)$$

Das *Auswahlaxiom* besagt, das es für jede Familie $\mathscr{F}$ von nicht-leeren Mengen eine Funktion f gibt, die aus jeder Menge $x \in \mathscr{F}$ ein Element $f(x)$ auswählt. Etwas informeller heisst dies, dass jede Familie nicht-leerer Mengen eine Auswahlfunktion besitzt, oder noch etwas kürzer, cartesische Produkte nicht-leerer Mengen sind nicht leer.

Die Axiome ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom AC (für *Axiom of Choice*) ist das Axiomensystem der **Mengenlehre** und wird mit ZFC bezeichnet.

Äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms

In der Mathematik wird anstelle des Auswahlaxioms meist eine äquivalente Formulierung benutzt, wie zum Beispiel das *Kuratowski-Zorn Lemma* — manchmal auch bloss *Lemma von Zorn* genannt, obwohl Kuratowski dieses Lemma mehr als 10 Jahre vor Zorn bewiesen und publiziert hat.

Bevor wir nun zwei zum Auswahlaxiom äquivalente Auswahlprinzipien formulieren (und deren Äquivalenz zu AC beweisen), beweisen wir, ohne das Auswahlaxiom zu benutzen, ein Lemma. Dafür müssen wir aber zuerst die Begriff *Partialordnung*, *Kette* und *obere Schranke* einführen. Eine Menge P zusammen mit einer binäre Relation $\leq$ ist eine **Partialordnung**, falls die Relation $\leq$ reflexiv ($x \leq x$), anti-symmetrisch (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$), und transitiv (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$) ist. Eine Teilmenge $K \subseteq P$ einer Partialordnung $(P, \leq)$ ist eine **Kette**, falls K durch $\leq$ linear geordnet wird. Ist $A \subseteq P$ eine Teilmenge der Partialordnung $(P, \leq)$, so ist $q \in P$ eine **obere Schranke von A**, falls $x \leq q$ für alle $x \in A$.

LEMMA 5.1. *Sei $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung. Falls eine Funktion $\mathrm{g} : \mathscr{P}(P) \to P$ existiert die jeder Kette $K \subseteq P$ eine obere Schranke $\mathrm{g}(K)$ zuordnet, und falls eine Funktion $f : P \to P$ existiert, sodass für alle $x \in P$ gilt $x \leq f(x)$, so existiert ein $p_0 \in P$ mit $p_0 = f(p_0)$.*

Beweis. Da jede wohlgeordnete Teilmenge von P eine Kette ist, genügt es das Lemma zu beweisen unter der Voraussetzung, dass jede wohlgeordnete Menge $W \subseteq P$ eine obere Schranke $\mathrm{g}(W)$ hat.

Ist $W \subseteq P$ eine durch "$<$" wohlgeordnete Menge und ist $x \in W$, dann sei

$$W_x := \{ y \in W : y < x \} .$$

Eine Teilmenge A einer wohlgeordneten Menge W heisst **Anfangsabschnitt** von W, falls A mit jedem Element x auch alle y aus W enthält für die gilt $y < x$. Für jedes $x \in W$ ist W_x ein Anfangsabschnitt von W, und auch die ganze Menge W ist ein Anfangsabschnitt von W. Ist A ein Anfangsabschnitt von W, so schreiben wir $A \preccurlyeq W$. Es gilt sogar, dass jeder Anfangsabschnitt der wohlgeordneten Menge W entweder W selber ist, oder von der Form W_x (für ein $x \in W$) ist. Wenn nämlich ein Anfangsabschnitt $A \neq W$ ist und wenn $x_0 \in W$ das $<$-minimale Element ist welches nicht in A ist, so ist $A = W_{x_0}$.

Eine wohlgeordnete Menge $K \subseteq P$ ist eine ***fg*-Kette**, falls für alle $x \in K$ gilt

$$x = f(\mathrm{g}(K_x))\,.$$

Zum Beispiel ist, weil $\emptyset \subseteq P$ eine wohlgeordnete Menge ist, $\{f(\mathrm{g}(\emptyset))\}$ eine fg-Kette. Insbesondere haben alle f-Ketten dasselbe $<$-minimale Element $f(\mathrm{g}(\emptyset))$. Weiter ist jeder Anfangsabschnitt einer fg-Kette wieder eine fg-Kette.

Seien K und L zwei fg-Ketten. Wir zeigen:

$$K \not\preccurlyeq L \Rightarrow L \preccurlyeq K$$

Die Anfangsabschnitte von K sind die Abschnitte K_y (für $y \in K$) und K selbst. Da K durch die Relation "$<$" wohlgeordnet wird, werden die Anfangsabschnitte K_y durch "$\subsetneq$" wohlgeordnet, denn es gilt:

$$K_x \subsetneq K_y \iff x < y$$

Ist K nicht Anfangsabschnitt von L, so existiert ein $\subsetneq$-minimaler Anfangsabschnitt $A \preccurlyeq K$, sodass $A \not\preccurlyeq L$.

Hätte A kein $<$-maximales Element, so existiert zu jedem $x \in A$ ein $y \in A$ mit $x < y$ und wir hätten $A = \bigcup_{y \in A} A_y$. Weil nun $A \not\preccurlyeq L$ und A $\subsetneq$-minimal ist mit dieser Eigenschaft, ist für alle $y \in A$, $A_y \preccurlyeq L$ und somit ist auch $A = \bigcup_{y \in A} A_y \preccurlyeq L$, im Widerspruch zur Wahl von A.

Somit hat A ein $<$-maximales Element $y_0 \in A$ und $A = A_{y_0} \cup \{y_0\}$, wobei $A_{y_0} \preccurlyeq L$. Wäre nun $L \neq A_{y_0}$, so gäbe es ein $<$-minimales Element $z \in L$ das nicht zu A_{y_0} gehört für das gilt

$$A_{y_0} = L_z\,,$$

und weil K und L zwei fg-Ketten sind und $K_{y_0} = A_{y_0}$, erhalten wir:

$$y_0 = f(g(K_{y_0})) = f(g(L_z)) = z$$

Das heisst, $y_0 = z$ und aus $A = A_{y_0} \cup \{y_0\} = L_z \cup \{z\} \preccurlyeq L$ folgt $A \preccurlyeq L$, entgegen der Voraussetzung. Es bleibt also nur die Möglichkeit $L = A_{y_0} = K_{y_0}$, d. h. L ist ein Anfangsabschnitt von K.

Von zwei fg-Ketten ist also immer eine ein Anfangsabschnitt der anderen. Ist nun

$$U := \bigcup \bigl\{K \subseteq P : K \text{ ist eine } fg\text{-Kette}\bigr\}$$

die Vereinigung aller fg-Ketten, dann ist U ebenfalls eine fg-Kette die in keiner fg-Kette echt enthalten ist. Sei $q := \mathrm{g}(U)$ eine obere Schranke von U. Dann ist $q \in U$, denn sonst wäre, weil $f(q) \geq q$, U in der fg-Kette $U \cup \{f(q)\}$ echt enthalten. Daraus folgt, dass auch $p_0 := f(q)$ in U ist. Wäre nun $q \neq p_0$, so folgt aus der Definition von f und aus $f(q) = p_0$, dass gilt $q < p_0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $p_0 \in U$ und q obere Schranke von U. Somit ist $q = p_0$, woraus $f(p_0) = p_0$ folgt. $\dashv$

Die folgende Aussage ist wohl das bekannteste zu AC äquivalente Auswahlprinzip:

Kuratowski-Zorn Lemma KZL. Ist $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung, sodass jede Kette $K \subseteq P$ eine obere Schranke hat, so hat P ein maximales Element.

Für das nächste Auswahlprinzip das zu AC äquivalent ist, brauchen wir den Begriff *endlichen Charakter*: Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat **endlichen Charakter**, falls für jede Menge $x \in \mathscr{F}$ gilt, x ist in $\mathscr{F}$ genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von x in $\mathscr{F}$ ist.

Teichmüller-Prinzip TP. Ist $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter, so hat $\mathscr{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

THEOREM 5.2. *Die folgenden Auswahlprinzipien sind äquivalent.*

(a) *Auswahlaxiom* AC

(b) *Kuratowski-Zorn Lemma* KZL

(c) *Teichmüller-Prinzip* TP

Beweis. AC $\Rightarrow$ KZL: Sei $(P, \leq)$ eine nicht-leere Partialordnung, sodass jede Kette eine obere Schranke hat. Mit AC wählen wir für jede Kette $K \subseteq P$ eine obere Schranke $S(K)$ und definieren für ein $q_0 \in P$ die Funktion $\mathrm{g} : \mathscr{P}(P) \to P$ durch

$$\mathrm{g}(X) := \begin{cases} S(X) & \text{falls } X \subseteq P \text{ eine Kette ist,} \\ q_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter definieren wir für jedes $x \in P$ die Menge

$$M_x := \begin{cases} \{x\} & \text{falls } x \text{ ein maximales Element von } P \text{ ist,} \\ \{y \in P : y > x\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\{M_x : x \in P\}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen und mit AC können wir eine Funktion $f : P \to P$ definieren sodass für alle $x \in P$ gilt:

$$f(x) \in M_x$$

Weil $f(x) \geq x$ (für alle $x \in P$) und nach Voraussetzung jede Kette $K \subseteq P$ eine obere Schranke $g(K)$ hat, existiert mit Lemma 5.1 ein $p_0 \in P$ mit $f(p_0) = p_0$, d. h. P hat ein maximales Element.

KZL $\Rightarrow$ TP: Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter. Dann ist $(\mathscr{F}, \subseteq)$ eine nicht-leere Partialordnung. Für jede Kette $K \subseteq \mathscr{F}$ sei $U_K := \bigcup K$. Weil $\mathscr{F}$ endlichen Charakter hat, gehört, für Ketten K, jede endliche Teilmenge von U_K zu $\mathscr{F}$, und damit gehört auch U_K zu $\mathscr{F}$ und ist eine obere Schranke der Kette K. Somit hat jede Kette in $\mathscr{F}$ eine obere Schranke, und mit KZL hat somit $\mathscr{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

TP $\Rightarrow$ AC: Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen. Wir müssen eine Auswahlfunktion für $\mathscr{F}$ finden. Dazu bilden wir die Menge

$$\mathscr{E} = \left\{ f \in {}^{\mathscr{G}}\bigcup \mathscr{G} : f \text{ ist eine Auswahlfunktion für eine Teilfamilie } \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F} \right\}.$$

Eine Funktion $f : \mathscr{G} \to \bigcup \mathscr{G}$ ist eine Auswahlfunktion für $\mathscr{G}$ genau dann, wenn jede endliche Teilfunktion von f (d.h. $f|_{\mathscr{G}'}$ für endliche Teilmengen $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$), eine Auswahlfunktion ist. Die Familie $\mathscr{E}$ hat somit endlichen Charakter und mit TP hat $\mathscr{E}$ ein maximales Element f_0. Weil f_0 maximal ist, muss gelten $\mathrm{dom}(f_0) = \mathscr{F}$ und somit ist f_0 eine Auswahlfunktion für $\mathscr{F}$. $\dashv$