6. Konstruktion von Nichtstandard-Modellen

Filter und Ultrafilter

Sei S eine beliebige nicht-leere Menge. Eine Menge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ heisst **Filter** über S, falls $\mathscr{F}$ die folgenden Eigenschaften hat:

- $S \in \mathscr{F}$ und $\emptyset \notin \mathscr{F}$
- $(x \in \mathscr{F} \wedge y \in \mathscr{F}) \to (x \cap y) \in \mathscr{F}$
- $(x \in \mathscr{F} \vee y \in \mathscr{F}) \to (x \cup y) \in \mathscr{F}$

Insbesondere gilt, dass $x \in \mathscr{F}$ und $x \subseteq y$ impliziert, dass auch $y \in \mathscr{F}$. Ein Filter über S ist somit eine Mengen von nicht-leeren Teilmengen von S welche abgeschlossen ist unter Obermengen und endlichen Durchschnitten. Zum Beispiel ist $\{S\}$ ein Filter über S.

Ein interessanteres Beispiel eines Filters über einer unendlichen Menge S ist der Filter

$$\mathscr{F} := \{x \subseteq S : S \setminus x \text{ ist endlich}\},$$

welcher der sogenannte *Fréchet-Filter* ist. Eine Menge $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ist ein **Ultrafilter** über S, falls $\mathscr{U}$ ein Filter über S ist und für jede Menge $x \in \mathscr{P}(S)$ gilt: entweder $x \in \mathscr{U}$ oder $(S \setminus x) \in \mathscr{U}$. In anderen Worten ist $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter, falls $\mathscr{U}$ in keinem Filter echt enthalten ist. Zum Beispiel ist für jedes $a \in S$, die Menge

$$\mathscr{U}_a := \{x \subseteq S : a \in x\}$$

ein Ultrafilter über S. Solche Ultrafilter heissen *triviale Ultrafilter*. Insbesondere ist jeder Ultrafilter über einer endlichen Menge trivial.

Es stellt sich die Frage, ob nicht-triviale Ultrafilter existieren, zum Beispiel Ultrafilter welche den Fréchet-Filter enthalten. Allgemein stellt sich die Frage, ob sich jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitern lässt. Diese Frage wird vom Ultrafilter-Theorem beantwortet, welches mit dem Auswahlaxiom bewiesen werden kann – in ZF aber nicht beweisbar ist.

Ultrafilter-Theorem UFT. Ist $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ein Filter über S, dann lässt sich $\mathscr{F}$ zu einem Ultrafilter erweitern.

Ultraprodukte und Ultrapotenzen

Sei $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur, sei I eine nicht-leere Menge, und für jedes $\iota \in I$ sei $\mathbf{M}_\iota$ eine $\mathscr{L}$-Struktur mit Bereich A_ι. Weiter sei $A := \bigtimes_{\iota \in I} A_\iota$ das cartesische Produkt der Mengen A_ι. Die Elemente aus A identifizieren wir mit Funktionen $f : I \to \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, wobei für jedes $\iota \in I$ gilt $f(\iota) \in A_\iota$. Schliesslich sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(I)$ ein Ultrafilter über I. Bezüglich $\mathscr{U}$ definieren wir die binäre Relation $\sim$ auf A durch

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; \{\iota \in I : f(\iota) = g(\iota)\} \in \mathscr{U}\,.$$

FAKTUM 6.1. *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Offensichtlich gilt für alle $f, g \in A$, $f \sim f$ und $f \sim g \leftrightarrow g \sim f$. Seien nun $f, g, h \in A$ mit $f \sim g$ und $g \sim h$. Weiter sei

$$x := \{\iota \in I : f(\iota) = g(\iota)\} \quad \text{und} \quad y := \{\iota \in I : g(\iota) = h(\iota)\}\,.$$

Dann sind $x, y \in \mathscr{U}$ und weil $\mathscr{U}$ ein Filter ist, ist auch $x \cap y$ und jede Obermenge von $x \cap y$ in $\mathscr{U}$. Damit ist

$$x \cap y \subseteq \{\iota \in I : f(\iota) = h(\iota)\} \in \mathscr{U}\,,$$

woraus $f \sim h$ folgt, was zu zeigen war. ⊣

Für $f \in A$ sei

$$[f] := \{g \in A : g \sim f\}$$

und sei

$$A^* := \big\{[f] : f \in A\big\}.$$

Wir konstruieren nun die $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}^*$ mit dem Bereich A^* wie folgt:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \mathscr{L}$ sei $f_c \in A$ definiert durch

  $$f_c(\iota) := c^{\mathbf{M}_\iota} \quad \text{für alle } \iota \in I,$$

  und sei

  $$c^{\mathbf{M}^*} := [f_c].$$

- Für jedes n-stellige Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ sei $F^{\mathbf{M}^*} : (A^*)^n \to A^*$, sodass

  $$F^{\mathbf{M}^*}\big([f_0], \dots, [f_{n-1}]\big) = [f] \iff \Big\{\iota \in I : F^{\mathbf{M}_\iota}\big(f_0(\iota), \dots, f_{n-1}(\iota)\big) = f(\iota)\Big\} \in \mathscr{U}.$$

- Für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in \mathscr{L}$ sei $R^{\mathbf{M}^*} \subseteq (A^*)^n$, sodass

  $$\big\langle [f_0], \dots, [f_{n-1}]\big\rangle \in R^{\mathbf{M}^*} \iff \Big\{\iota \in I : \big\langle f_0(\iota), \dots, f_{n-1}(\iota)\big\rangle \in R^{\mathbf{M}_\iota}\Big\} \in \mathscr{U}.$$

FAKTUM 6.2. *Die Konstanten $c^{\mathbf{M}^*}$, die Funktionen $F^{\mathbf{M}^*}$, und die Relationen $R^{\mathbf{M}^*}$ sind wohldefiniert.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass die Funktionen $F^{\mathbf{M}^*} : (A^*)^n \to A$ wohldefiniert sind, der Beweis für die Wohldefiniertheit von $c^{\mathbf{M}^*}$ und $R^{\mathbf{M}^*}$ ist ähnlich. Sei $F \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Funktionssymbol und seien $\langle f_0, \dots, f_{n-1}\rangle$ und $\langle g_0, \dots, g_{n-1}\rangle$ Elemente in A^n sodass für jedes $0 \le i < n$ gilt

$$f_i \sim g_i \quad \text{beziehungsweise} \quad [f_i] = [g_i]\,.$$

Weiter definieren wir $f, g \in A$ durch

$$f(\iota) := F^{\mathbf{M}_\iota}\big(f_0(\iota), \dots, f_{n-1}(\iota)\big) \quad \text{und} \quad g(\iota) := F^{\mathbf{M}_\iota}\big(g_0(\iota), \dots, g_{n-1}(\iota)\big)\,.$$

Mit der Definition von $\sim$ und weil $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter über I ist, haben wir

$$\big\{\iota \in I : f_0(\iota) = g_0(\iota) \wedge \cdots \wedge f_{n-1}(\iota) = g_{n-1}(\iota)\big\} \in \mathscr{U},$$

und damit erhalten wir

$$\Big\{\iota \in I : F^{\mathbf{M}_\iota}\big(f_0(\iota), \dots, f_{n-1}(\iota)\big) = F^{\mathbf{M}_\iota}\big(g_0(\iota), \dots, g_{n-1}(\iota)\big)\Big\} \in \mathscr{U}.$$

Es gilt somit $\big\{\iota \in I : f(\iota) = g(\iota)\big\} \in \mathscr{U}$, woraus $[f] = [g]$ folgt, d. h.

$$F^{\mathbf{M}^*}\big([f_0], \dots, [f_{n-1}]\big) = F^{\mathbf{M}^*}\big([g_0], \dots, [g_{n-1}]\big)\,.$$

Damit hängt $F^{\mathbf{M}^*}$ nicht von der Wahl der Repräsentanten von $[f_i]$ ab. $\dashv$

Die $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}^*$ mit Bereich A^* ist das **Ultraprodukt** der $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathbf{M}_\iota$ ($\iota \in I$) bezüglich dem Ultrafilter $\mathscr{U}$ über I. Falls wir für alle $\iota \in I$ dieselbe $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ haben, d. h. $\mathbf{M}_\iota = \mathbf{M}$ für alle $\iota \in I$, dann ist $\mathbf{M}^*$ die **Ultrapotenz** von $\mathbf{M}$ bezüglich $\mathscr{U}$.

Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass falls jede $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}_\iota$ ein Modell der $\mathscr{L}$-Theorie T ist, auch das Ultraprodukt $\mathbf{M}^*$ ein Modell von T ist.

DER SATZ VON ŁOŚ

Sei wie oben $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur, sei I eine nicht-leere Menge, und für jedes $\iota \in I$ sei $\mathbf{M}_\iota$ eine $\mathscr{L}$-Struktur mit Bereich A_ι. Weiter sei $\mathscr{U}$ Ultrafilter über I und sei $\mathbf{M}^*$ das Ultraprodukt der $\mathscr{L}$-Strukturen $\mathbf{M}_\iota$ ($\iota \in I$) bezüglich $\mathscr{U}$. Mit dem folgenden Theorem können wir entscheiden, welche $\mathscr{L}$-Sätze im Modell $\mathbf{M}^*$ wahr sind.

THEOREM 6.3 (SATZ VON ŁOŚ). *Für jeden $\mathscr{L}$-Satz σ gilt:*

$$\mathbf{M}^* \models \sigma \quad \iff \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \sigma\} \in \mathscr{U}$$

Beweis. Mit den logischen Axiomen lässt sich zeigen, dass jeder $\mathscr{L}$-Satz σ logisch äquivalent ist zu einem $\mathscr{L}$-Satz σ' welcher nur $\neg$ und $\wedge$ als logische Operatoren und nur $\exists$ als Quantor enthält. Somit genügt es den SATZ VON ŁOŚ für $\mathscr{L}$-Sätze σ' zu beweisen. Der Beweis ist mit Induktion über der Anzahl der Symbole $\neg$, $\wedge$ und $\exists$ welche im $\mathscr{L}$-Satz σ' vorkommen.

Nach Konstruktion von $\mathbf{M}^*$ gilt der SATZ VON ŁOŚ für atomare $\mathscr{L}$-Sätze σ', d. h. für Sätze σ' die mit den Regeln (F0) und (F1) gebildet wurden.

Sei $\sigma' \equiv \neg\sigma_0$, wobei wir annehmen, dass der SATZ VON ŁOŚ für σ_0 bereits bewiesen wurde. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^* \models \neg\sigma_0 \quad &\iff \quad \mathbf{M}^* \not\models \sigma_0 \\
&\iff \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \sigma_0\} \notin \mathscr{U} \\
&\iff \quad I \setminus \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \sigma_0\} \in \mathscr{U} \\
&\iff \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \not\models \sigma_0\} \in \mathscr{U} \\
&\iff \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \neg\sigma_0\} \in \mathscr{U}
\end{aligned}$$

Sei nun $\sigma' \equiv \sigma_1 \wedge \sigma_2$, wobei wir annehmen, dass der SATZ VON ŁOŚ für σ_1 und σ_2 bereits bewiesen wurde. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^* \models \sigma_1 \wedge \sigma_2 \quad &\iff \quad \mathbf{M}^* \models \sigma_1 \quad \text{UND} \quad \mathbf{M}^* \models \sigma_2 \\
&\iff \quad \underbrace{\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \sigma_1\}}_{=:x_1} \in \mathscr{U} \text{ UND } \underbrace{\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \sigma_2\}}_{=:x_2} \in \mathscr{U} \\
&\iff \quad x_1 \cap x_2 \in \mathscr{U} \\
&\iff \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \sigma_1 \wedge \sigma_2\} \in \mathscr{U}
\end{aligned}$$

Sei nun $\sigma' \equiv \exists\nu\sigma_0$ (für eine Variable ν), wobei wir annehmen, dass für ein $[g] \in A^*$ gilt

$$\mathbf{M}^* \tfrac{[g]}{\nu} \models \sigma_0(\nu) \iff \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \tfrac{g(\iota)}{\nu} \models \sigma_0(\nu)\} \in \mathscr{U}.$$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^* \models \exists\nu\sigma_0 \quad &\iff \quad \text{ES EXISTIERT EIN } [g_0] \text{ IN } A^* \text{ MIT } \mathbf{M}^* \tfrac{[g_0]}{\nu} \models \sigma_0(\nu) \\
&\iff \quad \text{ES EXISTIERT EIN } [g_0] \text{ IN } A^* \text{ MIT } \underbrace{\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \tfrac{g_0(\iota)}{\nu} \models \sigma_0(\nu)\}}_{=:x} \in \mathscr{U}
\end{aligned}$$

Weil $x \subseteq \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\}$, folgt $\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\} \in \mathscr{U}$, und wir erhalten

$$\mathbf{M}^* \models \exists\nu\sigma_0 \quad \Longrightarrow \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\} \in \mathscr{U}.$$

Um die andere Richtung zu zeigen brauchen wir AC. Falls, für ein $\iota \in I$, $\mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0$, dann existiert ein $a_\iota \in A_\iota$, sodass $\mathbf{M}_\iota \frac{a_\iota}{\nu} \models \sigma_0(\nu)$, andernfalls sei a_ι irgend ein Element von A_ι. Für die Funktion

$$\begin{array}{rccc} g_0 : & I & \to & \bigcup A \\ & \iota & \mapsto & a_\iota \end{array}$$

gilt $\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\} = \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \frac{g_0(\iota)}{\nu} \models \sigma_0(\nu)\}$. Insbesondere haben wir

$$\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\} \in \mathscr{U} \quad \Longrightarrow \quad \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \frac{g_0(\iota)}{\nu} \models \sigma_0(\nu)\} \in \mathscr{U},$$

woraus folgt

$$\{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\} \in \mathscr{U} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{M}^* \models \exists\nu\sigma_0 .$$

Somit gilt:

$$\mathbf{M}^* \models \exists\nu\sigma_0 \Longleftrightarrow \{\iota \in I : \mathbf{M}_\iota \models \exists\nu\sigma_0\} \in \mathscr{U}$$

$\dashv$

Ist zum Beispiel $I = \omega$ und für alle $n \in \omega$, $\mathbf{M}_n = \mathbb{N}$ (wobei $\mathbb{N}$ das Standardmodell der Peano-Arithmetik ist), so gelten in der Ultrapotenz $\mathbf{M}^*$ von $\mathbb{N}$ genau dieselben $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze wie im Modell $\mathbb{N}$. Insbesondere lassen sich die Modelle $\mathbb{N}$ und $\mathbf{M}^*$ durch die Sätze, die in ihnen gelten, nicht unterscheiden, obwohl das Modell $\mathbb{N}$ für nicht-triviale Ultrafilter $\mathscr{U}$ über ω überabzählbar ist.