

7. EINFÜHRUNG IN DIE NICHTSTANDARD-ANALYSIS

Die Idee der Nichtstandard-Analysis ist, dass wir gleichzeitig mit zwei Modellen der reellen Zahlen arbeiten. Ein Modell, nennen wir es das *Grundmodell*, übernimmt die Rolle des Standardmodells \mathbb{R} , und das andere Modell, eine Ultrapotenz von \mathbb{R} bezüglich einem nicht-trivialen Ultrafilter \mathcal{U} über ω , welches wir mit \mathbb{R}^* bezeichnen, ist aus der Sicht von \mathbb{R} ein Nichtstandardmodell. In \mathbb{R}^* sind dieselben Sätze wahr wie im Modell \mathbb{R} , d. h. die beiden Modelle sind elementar äquivalent. Wir stellen uns nun auf den Standpunkt, dass die eigentliche Analyse im Modell \mathbb{R}^* stattfindet, aber — als Menschen die in \mathbb{R} leben — können wir nur den Standardteil der reellen Zahlen in \mathbb{R}^* “sehen”. Auch wenn wir eine recht eingeschränkte Sicht von aus \mathbb{R} auf die richtige Analysis haben, können wir aufgrund der Tatsache, dass die Modelle \mathbb{R} und \mathbb{R}^* elementar äquivalent sind, keinen Unterschied zwischen den beiden Modellen auf der formalen Ebene sehen, denn jeder Satz der in einem der Modelle wahr ist, ist auch im anderen Modell wahr. Um zum Beispiel ein Problem in \mathbb{R} zu lösen, können wir unsere Berechnungen auch in \mathbb{R}^* durchführen, wobei wir in \mathbb{R}^* reelle Zahlen verwenden können, die es in \mathbb{R} nicht gibt, und am Ende “projizieren” wir das Ergebnis einfach wieder auf \mathbb{R} .

Wir betrachten nun die Modelle \mathbb{R} und \mathbb{R}^* etwas genauer und legen auch die Notationen fest: Der Bereich von \mathbb{R} wird mit \mathbb{R} bezeichnet, mit den natürlichen Zahlen \mathbb{N} , und der Bereich von \mathbb{R}^* wird mit \mathbb{R}^* bezeichnet, mit den natürlichen Zahlen \mathbb{N}^* . Die Elemente aus \mathbb{R}^* sind Äquivalenzklassen $[f]$ von Funktionen $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}$. Für solche Äquivalenzklassen schreiben wir auch einfach r^* . Durch die Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ r &\mapsto [c_r] \quad \text{wobei } c_r : \omega \rightarrow \{r\} \end{aligned}$$

erhalten wir, dass \mathbb{R} eine Teilmenge ist von \mathbb{R}^* , und auch, dass \mathbb{N} eine Teilmenge ist von \mathbb{N}^* . Ferner sehen wir, dass die Äquivalenzklasse $[d]$ für $d(n) := n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) ein Element aus \mathbb{N}^* ist, welches grösser ist als alle Elemente aus \mathbb{N} . Für $N := [d]$ ist damit $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Andererseits ist die Äquivalenzklasse $\delta_0 := [d^{-1}]$ für $d^{-1}(n) := \frac{1}{n}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) ein Element aus $\bar{\mathbb{R}}$, für welches gilt $0 < \delta_0 < \frac{1}{n}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Vom Standpunkt von \mathbb{R} aus gesehen existiert δ_0 nicht, denn δ_0 wäre eine unendlich kleine reelle Zahl, eine sogenannte **Infinitesimalzahl** (d. h. eine reelle Zahl ungleich Null, deren Absolutwert kleiner ist als $\frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$). Wir sagen, dass $r^*, s^* \in \mathbb{R}^*$ **unendlich nahe** sind, bezeichnet mit $r^* \approx s^*$, wenn $r^* - s^*$ infinitesimal ist. Man beachte, dass \approx eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^* definiert.

Sei $\bar{\mathbb{R}}$ die Menge aller reellen Zahlen $r^* \in \mathbb{R}^*$, für die es $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $s_1 \leq r^* \leq s_2$. Offensichtlich ist $\mathbb{R} \subseteq \bar{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^*$.

Die folgende Proposition besagt, dass die reellen Zahlen in $\bar{\mathbb{R}}$ genau die reellen Zahlen sind, die auf \mathbb{R} “projiziert” werden können, d. h. die unendlich nahe bei einer reellen Zahl aus \mathbb{R} liegen.

PROPOSITION 7.1. *Für jedes $r^* \in \bar{\mathbb{R}}$ existiert genau ein $r \in \mathbb{R}$, sodass $r^* \approx r$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist offensichtlich, denn aus $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r^* \approx r_1$ und $r^* \approx r_2$ folgt aus der Transitivität, dass $r_1 \approx r_2$, und weil $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ folgt $r_1 - r_2 = 0$, also $r_1 = r_2$.

Um die Existenz zu zeigen gehen wir wie folgt vor: Sei $r^* = [f]$ für ein $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ und seien $s, t \in \mathbb{R}$ so, dass $[c_s] \leq [f] \leq [c_t]$. Dann gilt

$$\{n \in \omega : s \leq f(n) \leq t\} \in \mathcal{U}.$$

Wir konstruieren nun die Sequenzen (s_n) und (t_n) in \mathbb{R} wie folgt: Sei $s_0 := s$ und $t_0 := t$. Seien s_n und t_n bereits konstruiert mit

$$x_n := \{n \in \omega : s_n \leq f(n) \leq t_n\} \in \mathcal{U},$$

Sei

$$y_n := \{n \in \omega : s_n \leq f(n) \leq \frac{s_n+t_n}{2}\} \quad \text{und} \quad z_n := \{n \in \omega : \frac{s_n+t_n}{2} < f(n) \leq t_n\}.$$

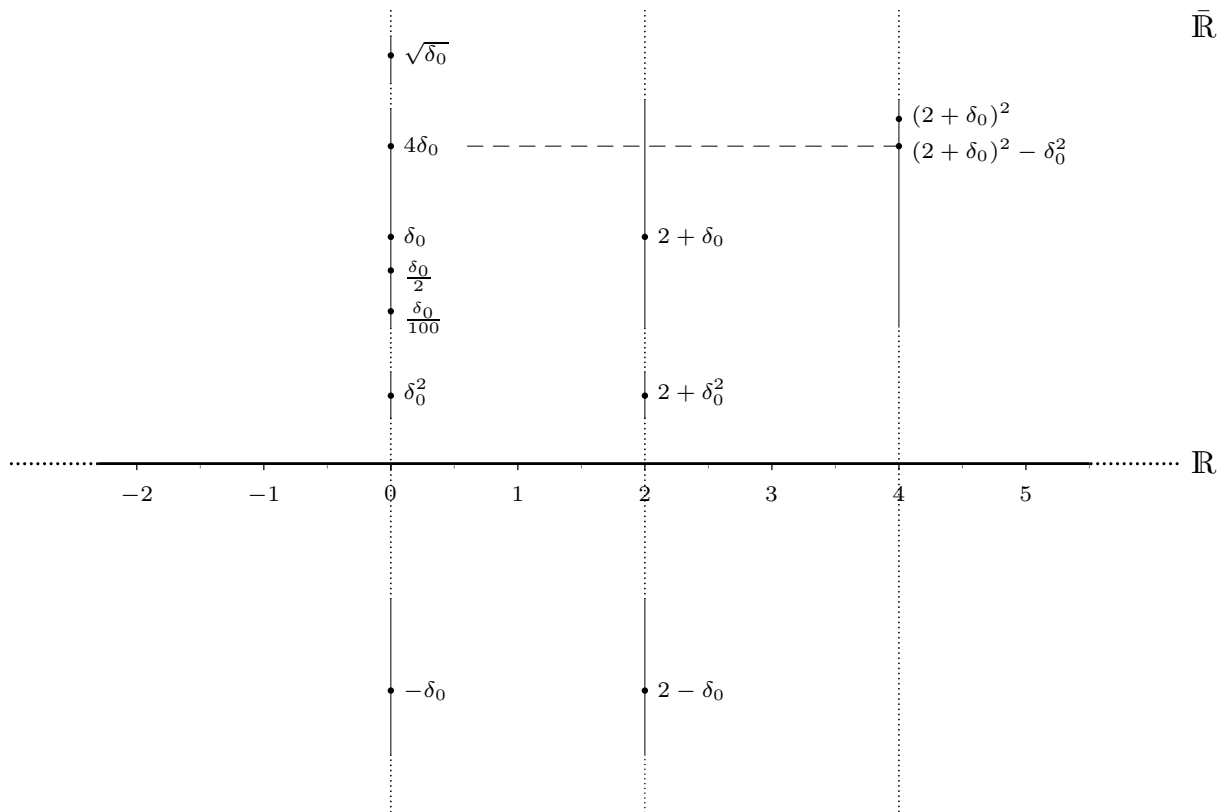
Weil \mathcal{U} ein Ultrafilter ist haben wir entweder $y_n \in \mathcal{U}$ oder $(\omega \setminus y_n) \in \mathcal{U}$. Im ersten Fall, sei $s_{n+1} = s_n$ und $t_{n+1} = \frac{s_n+t_n}{2}$, im zweiten Fall sei $s_{n+1} = \frac{s_n+t_n}{2}$ und $t_{n+1} = t_n$. Beachte, dass $y_n \cup z_n = x_n$ und somit $x_n \cap (\omega \setminus y_n) = z_n$, sodass in beiden Fällen gilt

$$x_{n+1} := \{n \in \omega : s_{n+1} \leq f(n) \leq t_{n+1}\} \in \mathcal{U}.$$

Die Folge (s_n) ist monoton wachsend und die Folge (t_n) ist monoton fallend, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $[c_{s_n}] \leq [f] \leq [c_{t_n}]$. Weil nach Konstruktion, $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - s_n) = 0$, ist das Supremum $r \in \mathbb{R}$ der Folge (s_n) gleich dem Infimum der Folge (t_n) , und somit ist $r^* \approx r$. \dashv

Für $r^* \in \bar{\mathbb{R}}$ heisst die eindeutig bestimmte Zahl $r \in \mathbb{R}$, sodass $r \approx r^*$, der **Standardteil** von $r^* \in \bar{\mathbb{R}}$, bezeichnet mit $\text{st}(r^*)$. Proposition 7.1 besagt, dass jede reelle Zahl $r^* \in \bar{\mathbb{R}}$ von der Form $r^* = [c_r] + [f_\delta]$ ist, wobei $r = \text{st}(r^*)$ und für $f_\delta : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\delta(n) = 0$. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir für r^* bloss $r + \delta$ anstelle von $[c_r] + [f_\delta]$.

Sei zum Beispiel $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ und $\delta_0 := \frac{1}{N}$. Dann ist der Standardteil von δ_0 gleich 0, d. h., für die Leute in \mathbb{R} ist $\delta_0 \approx 0$. Weiter ist $2 + \delta_0 \approx 2$ bzw. $\text{st}(2 + \delta_0) = 2$. Ferner ist $2 + \delta_0$ in $\bar{\mathbb{R}}$, aber $N = \frac{1}{\delta_0}$ ist nicht in $\bar{\mathbb{R}}$, weil es kein $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $N \leq s$. Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$, als eine Teilmenge von \mathbb{R}^* , ist linear geordnet durch $<_{\bar{\mathbb{R}}}^*$. Beachte, dass $<_{\bar{\mathbb{R}}}^*$ eingeschränkt auf \mathbb{R} die lineare Ordnung auf \mathbb{R} ist. Die folgende Figur veranschaulicht die Ordnungsstruktur von $\bar{\mathbb{R}}$.



Das folgende Resultat zeigt unter anderem, wie man in der Nichtstandard-Analysis ohne Limes bestimmte Integrale berechnen kann (Beweise finden sich in Ch. 4,5,6 von [Rob]*).

PROPOSITION 7.2.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$, sei f eine reelle Funktion welche stetig ist an der Stelle a , und sei $a^* \in \mathbb{R}^*$ mit $a^* \approx a$. Dann gilt:

$$f(a^*) \approx f(a)$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei f eine reelle Funktion. Existiert ein $r \in \mathbb{R}$ sodass

$$\text{st} \left(\frac{f(a + \delta) - f(a)}{\delta} \right) = r \quad \text{für alle } \delta \approx 0 \text{ mit } \delta \neq 0,$$

so ist f differenzierbar an der Stelle a und es gilt $f'(a) = r$.

(c) Sei $b \in \mathbb{R}$, sei f eine reelle Funktion welche stetig ist im Intervall $[0, b]$, und sei $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt in \mathbb{R} :

$$\int_0^b f(x) dx = \text{st} \left(\frac{b}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kb}{N}\right) \right).$$

EIN BEISPIEL

$$\int_0^{2\pi} \ln(2 - e^{ix}) dx$$

Sei $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Mit Proposition 7.2.(c) gilt:

$$\int_0^{2\pi} \ln(2 - e^{ix}) dx = \text{st} \left(\frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N_1} \ln(2 - e^{2\pi ik/N}) \right) = \text{st} \left(\frac{2\pi}{N} \cdot \ln \left(\prod_{k=0}^{N_1} (2 - e^{2\pi ik/N}) \right) \right)$$

Sei nun $\xi := e^{2\pi i/N}$. Dann sind ξ^k für $k = 0, \dots, N-1$ grad die N verschiedenen Nullstellen von $X^N - 1$. Das heisst,

$$X^N - 1 = (X - \xi^0) \cdot (X - \xi^1) \cdot (X - \xi^2) \cdot \dots \cdot (X - \xi^{N-1}),$$

und somit ist

$$\prod_{k=0}^{N_1} (2 - e^{2\pi ik/N}) = \prod_{k=0}^{N_1} (2 - \xi^k) = 2^N - 1.$$

Weiter ist

$$\frac{2\pi}{N} \cdot \ln(2^{N-1}) < \frac{2\pi}{N} \cdot \ln(2^N - 1) < \frac{2\pi}{N} \cdot \ln(2^N),$$

*[Rob] Alain M. Robert: *Nonstandard Analysis*. Dover Publ. New York. 1988

und mit $\ln(2^{N-1}) = (N-1) \cdot \ln(2)$ und $\ln(2^N) = N \cdot \ln(2)$ folgt:

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 2\pi \cdot \ln(2) < \frac{2\pi}{N} \cdot \ln(2^N - 1) < 2\pi \cdot \ln(2)$$

Weil nun $\operatorname{st}\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 1$, folgt

$$\operatorname{st}\left(\frac{2\pi}{N} \cdot \ln(2^N - 1)\right) = 2\pi \cdot \ln(2),$$

und somit ist

$$\int_0^{2\pi} \ln(2 - e^{ix}) dx = 2\pi \cdot \ln(2) = \pi \cdot \ln(4).$$