8. GRUNDBEGRIFFE DER GRAPHENTHEORIE

KNOTEN, KANTEN, GRADE

Ein **Graph** kann aufgefasst werden als eine $\mathscr{L}$-Struktur mit einem Bereich V, wobei die Signatur $\mathscr{L}$ aus einer oder mehreren binären Relationssymbolen E bzw. $E_0, \ldots, E_k$ (für $k \in \omega$) besteht. Ein Graph G besteht also aus einer Menge V, den sogenannten **Knoten** (engl. *vertices*), und einer oder mehrerer Mengen $E \subseteq V \times V$ bzw. $E_0, \ldots, E_k \subseteq V \times V$, den sogenannten **Kanten** (engl. *edges*). Wir schreiben also $G = (V, E)$ bzw. $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$.

xEy bzw. $\langle x, y\rangle \in E$ bedeutet, dass x und y durch eine Kante von x nach y verbunden sind; x und y heissen dann **adjazent**. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und ist die Relation E symmetrisch, d. h. $\forall x, y \in V\,(xEy \leftrightarrow yEx)$, so ist G ein **ungerichteter** Graph, andernfalls ist G ein **gerichteter** Graph, auch **Digraph** genannt. Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so indentifizieren wir die Kanten $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, x\rangle$ und schreiben $\{x, y\} \in E$.

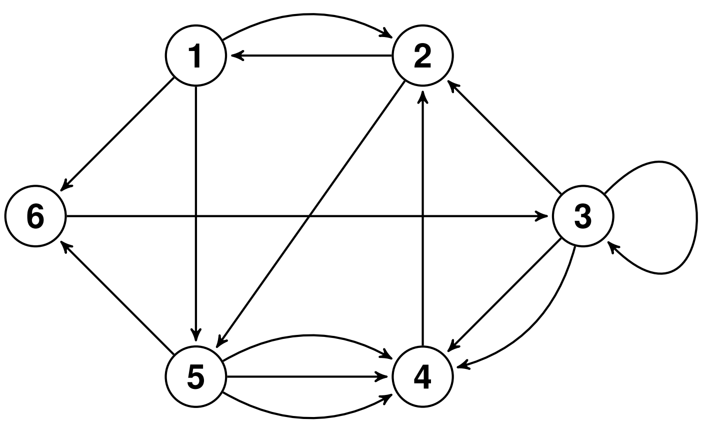
Eine Kante $\langle x, x\rangle$ heisst **Schlinge** (engl. *loop*). Ein Graph $G = (V, E)$ ist **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt, wenn also $\forall x \in V\,(\neg xEx)$ gilt. Wenn wir mehrere Relationen $E_0, \ldots, E_k$ in $\mathscr{L}$ haben, so kann der Graph $(V, E_0, \ldots, E_k)$ auch mehrere Kanten zwischen zwei Knoten x und y besitzen. Solche *Mehrfachkanten* sind verschieden, da sie zu verschiedenen Relationen E_i gehören. Ein Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten heisst **schlicht**.

Ist $G = (V, E)$ ein endlicher Graph, d. h. $V = \{v_1, \ldots v_n\}$ für ein $n \in \omega$ und $E \subseteq V \times V$, so können wir den Graphen G mit einer $(n \times n)$-Matrix $A(G) = (a_{ij})$, der sogenannten **Adjazenzmatrix** von G, darstellen, welche wie folgt definiert ist:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle v_i, v_j\rangle \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$ ein endlicher Graph mit Mehrfachkanten, so ist die Adjazenzmatrix $A(G)$ von G die Summe der Adjazenzmatrizen $A(G_l)$ der Graphen $G_l = (V, E_l)$, d. h. $A(G) = \sum_{l=0}^{k} A(G_l)$. Die Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen G ist genau dann symmetrisch, wenn G ein ungerichteter Graph ist.

Beispiel eines gerichteten Graphen und seiner Adjazenzmatrix:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Grad eines Knotens $x \in V$ "misst" wie viele Kanten von x ausgehen bzw. in x zusammenkommen.

Wir definieren Grade von Knoten zuerst für Digraphen: Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Für $x \in V$ seien

$$\Gamma^+(x) := \big\{y \in V : \langle x, y\rangle \in E\big\} \quad \text{und} \quad \Gamma^-(x) := \big\{y \in V : \langle y, x\rangle \in E\big\}.$$

Weiter seien

$$\deg^+(x) := |\Gamma^+(x)| \quad \text{und} \quad \deg^-(x) := |\Gamma^-(x)|.$$

Für $x \in V$ heisst $\deg^+(x)$ **positiver Halbgrad** von x und $\deg^-(x)$ heisst **negativer Halbgrad** von x. Manchmal wird $\deg^+(x)$ auch mit $d_{\text{out}}(x)$ und $\deg^-(x)$ auch mit $d_{\text{in}}(x)$ bezeichnet. Schliesslich sei $\deg(x) := \deg^+(x) + \deg^-(x)$ der **Grad** von x. Beachte: Schlingen werden für den Grad doppelt gezählt.

Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so definieren wir für $x \in V$:

$$\Gamma(x) := \big\{y \in V : \{x, y\} \in E\big\} \quad \text{und} \quad \deg(x) := |\Gamma(x)| + \big|\big\{x \in V : \{x\} \in E\big\}\big|.$$

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $\deg(x) = r$ für alle $x \in V$ heisst **regulär** vom Grad r.

Ein ungerichteter Graph heisst **vollständig**, falls für alle Knoten $x \neq y$ gilt $\{x, y\} \in E$. Der vollständige, ungerichtete, schlichte Graph mit n Knoten wird mit K_n bezeichnet. K_n ist ein regulärer Graph vom Grad $n - 1$.

Teilgraphen, Pfeil- und Kantenzüge

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein **Teilgraph** von G, geschrieben $G' \subseteq G$.

Spezialfälle

- Sei $U \subseteq V$. Der **durch U erzeugte** Teilgraph $G' = G_U \subseteq G$ ist definiert durch

$$V' := U \quad \text{und} \quad E' := \big\{\langle x, y\rangle \in E : \{x, y\} \subseteq U\big\}.$$

- Sei $F \subseteq E$. Der **durch F erzeugte** Teilgraph $G' = G_F \subseteq G$ ist definiert durch

$$V' := \bigcup \big\{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y\rangle \in F\big\} \quad \text{und} \quad E' := F.$$

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph (nicht notwendigerweise schlingenfrei) und sei $H \subseteq E$ eine nicht-leere, endliche Kantenteilmenge sodass für ein $l \geq 1$ gilt:

$$|H| = l \quad \text{und} \quad H = \big\{\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{l-1}, x_l\rangle\big\}.$$

Der durch H erzeugte Teilgraph G_H heisst **Pfeilzug von x_0 nach x_l** der Länge l. Wir unterscheiden:

- **offener Pfeilzug**, falls $x_0 \neq x_l$
- **geschlossener Pfeilzug** falls $x_0 = x_l$,

Beachte, dass in einem Pfeilzug die Kanten paarweise verschieden sind. Falls auch die x_i paarweise verschieden sind, so heisst G_H **Bahn von x_0 nach x_l** der Länge l. Falls die x_i paarweise verschieden sind ausser $x_0 = x_l$, so ist G_H ein **Wirbel**.

Aus den Definitionen folgt, dass jeder offene Pfeilzug von a nach b eine Bahn von a nach b als Teilgraphen enthält, und dass jeder geschlossene Pfeilzug immer einen Wirbel als Teilgraphen enthält.

Für ungerichtete Graphen sind die Definitionen analog und wir sprechen im ungerichteten Fall von **offenen** bzw. **geschlossenen Kantenzügen** (anstelle von Pfeilzügen), sowie von **Wegen** und **Kreisen** (anstelle von Bahnen und Wirbeln).

Die Definition sind analog für Graphen mit Mehrfachkanten, wobei Mehrfachkanten wieder als verschieden betrachtet werden.

Ein Graph (gerichtet oder ungerichtet) heisst **zusammenhängend**, wenn jedes Paar von verschiedenen Knoten durch einen Weg (ungerichtet) verbunden ist.

Pfeilfolgen bestimmter Länge

Eine Folge der Länge l von Kanten $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{l-1}, x_l\rangle$ eines Graphen $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$, in der Kanten auch mehrfach vorkommen können, nennen wir eine **Pfeilfolge von x_0 nach x_l der Länge l.**

Mit der Adjazenzmatrix eines Digraphen $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$ können wir bestimmen, wie viele verschiedene Peilfolgen einer bestimmten Länge es zwischen zwei Knoten gibt.

PROPOSITION 8.1. *Sei $G = (V, E_0, \ldots, E_k)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein endlicher Digraph und sei A die Adjazenzmatrix von G. Sei A^k die k-te Potenz von A für ein $k \geq 1$. Ist $A^k := \left(a_{ij}^{[k]}\right)$, so ist $a_{ij}^{[k]}$ die Anzahl der verschiedenen Pfeilfolgen von v_i nach v_j der Länge k.*

Beweis. Mit Induktion nach k. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus der Definition der Adjazenzmatrix. Es gilt also für alle $l, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } 1 \text{ von } v_l \text{ nach } v_j.$$

Sei die Behauptung richtig für ein $k \geq 1$. Dann gilt für alle $i, l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_{il}^{[k]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_l.$$

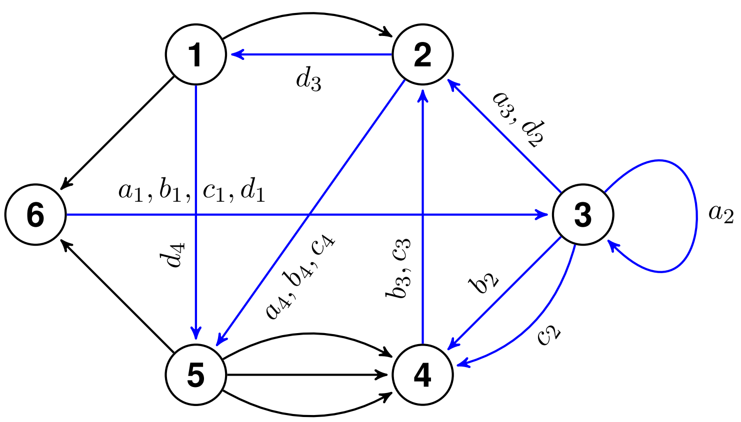
Somit gilt für jedes i, für jedes j und für jedes l:

$$a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j \text{ via } v_l,$$

und

$$a_{ij}^{[k+1]} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j. \qquad \dashv$$

Obiges Beispiel mit A^4: Es gibt 4 verschiedene Pfeilfolgen a, b, c, d der Länge 4 vom Knoten 6 zum Knoten 5.



$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 14 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 11 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$