

## 8. GRUNDBEGRIFFE DER GRAPHENTHEORIE

### KNOTEN, KANTEN, GRADE

Ein **Graph** kann aufgefasst werden als eine  $\mathcal{L}$ -Struktur mit einem Bereich  $V$ , wobei die Signatur  $\mathcal{L}$  aus einer oder mehreren binären Relationssymbolen  $E$  bzw.  $E_0, \dots, E_k$  (für  $k$  endlich) besteht. Ein Graph  $G$  besteht also aus einer Menge  $V$ , den sogenannten **Knoten** (engl. *vertices*), und einer oder mehrerer Mengen  $E \subseteq V \times V$  bzw.  $E_0, \dots, E_k \subseteq V \times V$ , den sogenannten **Kanten** (engl. *edges*). Wir schreiben also  $G = (V, E)$  bzw.  $G = (V, E_0, \dots, E_k)$ .

$xEy$  bzw.  $\langle x, y \rangle \in E$  bedeutet, dass  $x$  und  $y$  durch eine Kante von  $x$  nach  $y$  verbunden sind;  $x$  und  $y$  heissen dann **adjazent**. Ist  $G = (V, E)$  ein Graph und ist die Relation  $E$  symmetrisch, d. h.  $\forall x, y \in V (xEy \leftrightarrow yEx)$ , so ist  $G$  ein **ungerichteter** Graph, andernfalls ist  $G$  ein **gerichteter** Graph, auch **Digraph** genannt. Ist  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph, so identifizieren wir die Kanten  $\langle x, y \rangle$  und  $\langle y, x \rangle$  und schreiben  $\{x, y\} \in E$ .

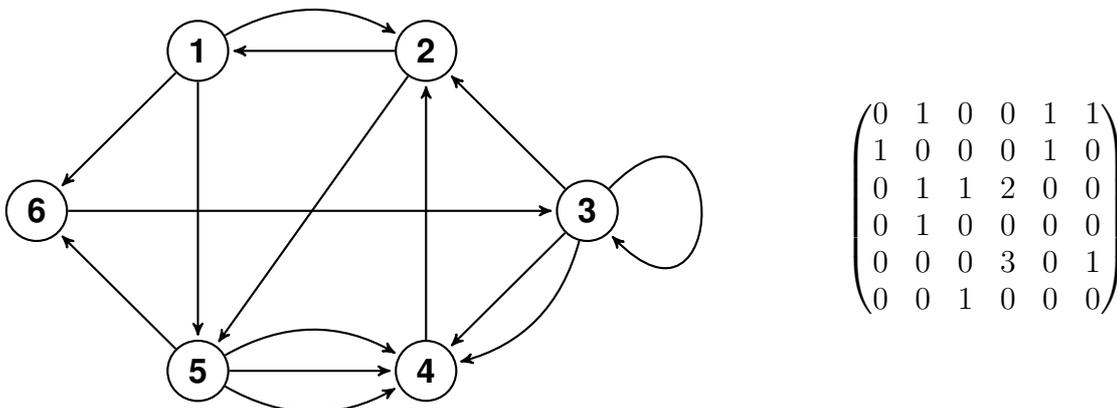
Eine Kante  $\langle x, x \rangle$  heisst **Schlinge** (engl. *loop*). Ein Graph  $G = (V, E)$  ist **schlingenf**rei, wenn er keine Schlingen besitzt, wenn also  $\forall x \in V (\neg xEx)$  gilt. Wenn wir mehrere Relationen  $E_0, \dots, E_k$  in  $\mathcal{L}$  haben, so kann der Graph  $(V, E_0, \dots, E_k)$  auch mehrere Kanten zwischen zwei Knoten  $x$  und  $y$  besitzen. Solche **Mehrfachkanten** sind verschieden, da sie zu verschiedenen Relationen  $E_i$  gehören. Ein Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten heisst **schlicht**.

Ist  $G = (V, E)$  ein endlicher Graph, d. h.  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  für ein endliches  $n$  und  $E \subseteq V \times V$ , so können wir den Graphen  $G$  mit einer  $(n \times n)$ -Matrix  $A(G) = (a_{ij})$ , der sogenannten **Adjazenzmatrix** von  $G$ , darstellen, welche wie folgt definiert ist:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle v_i, v_j \rangle \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $G = (V, E_0, \dots, E_k)$  ein endlicher Graph mit Mehrfachkanten, so ist die Adjazenzmatrix  $A(G)$  von  $G$  die Summe der Adjazenzmatrizen  $A(G_l)$  der Graphen  $G_l = (V, E_l)$ , d. h.  $A(G) = \sum_{l=0}^k A(G_l)$ . Die Adjazenzmatrix  $A(G)$  eines Graphen  $G$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $G$  ein ungerichteter Graph ist.

*Beispiel eines gerichteten Graphen und seiner Adjazenzmatrix:*



Der Grad eines Knotens  $x \in V$  “misst” wie viele Kanten von  $x$  ausgehen bzw. in  $x$  zusammenkommen.

Wir definieren Grade von Knoten zuerst für Digraphen: Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph. Für  $x \in V$  seien

$$\Gamma^+(x) := \{y \in V : \langle x, y \rangle \in E\} \quad \text{und} \quad \Gamma^-(x) := \{y \in V : \langle y, x \rangle \in E\}.$$

Weiter seien

$$\deg^+(x) := |\Gamma^+(x)| \quad \text{und} \quad \deg^-(x) := |\Gamma^-(x)|.$$

Für  $x \in V$  heisst  $\deg^+(x)$  **positiver Halbgrad** von  $x$  und  $\deg^-(x)$  heisst **negativer Halbgrad** von  $x$ . Manchmal wird  $\deg^+(x)$  auch mit  $d_{\text{out}}(x)$  und  $\deg^-(x)$  auch mit  $d_{\text{in}}(x)$  bezeichnet. Schliesslich sei  $\deg(x) := \deg^+(x) + \deg^-(x)$  der **Grad** von  $x$ . Beachte: Schlingen werden für den Grad doppelt gezählt.

Ist  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph, so definieren wir für  $x \in V$ :

$$\Gamma(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\} \quad \text{und} \quad \deg(x) := |\Gamma(x)| + |\{x \in V : \{x\} \in E\}|.$$

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $\deg(x) = r$  für alle  $x \in V$  heisst **regulär** vom Grad  $r$ .

Ein ungerichteter Graph heisst **vollständig**, falls für alle Knoten  $x \neq y$  gilt  $\{x, y\} \in E$ . Der vollständige, ungerichtete, schlichte Graph mit  $n$  Knoten wird mit  $K_n$  bezeichnet.  $K_n$  ist ein regulärer Graph vom Grad  $n - 1$ .

#### TEILGRAPHEN, PFEIL- UND KANTENZÜGE

Seien  $G = (V, E)$  und  $G' = (V', E')$  Graphen mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ , so ist  $G'$  ein **Teilgraph** von  $G$ , geschrieben  $G' \subseteq G$ .

#### Spezialfälle

- Sei  $U \subseteq V$ . Der **durch  $U$  erzeugte** Teilgraph  $G' = G_U \subseteq G$  ist definiert durch

$$V' := U \quad \text{und} \quad E' := \{\langle x, y \rangle \in E : \{x, y\} \subseteq U\}.$$

- Sei  $F \subseteq E$ . Der **durch  $F$  erzeugte** Teilgraph  $G' = G_F \subseteq G$  ist definiert durch

$$V' := \bigcup \{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y \rangle \in F\} \quad \text{und} \quad E' := F.$$

Sei  $G = (V, E)$  ein Digraph (nicht notwendigerweise schlingenfrei) und sei  $H \subseteq E$  eine nicht-leere, endliche Kantenteilmenge sodass für ein  $l \geq 1$  gilt:

$$|H| = l \quad \text{und} \quad H = \{\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{l-1}, x_l \rangle\}.$$

Der durch  $H$  erzeugte Teilgraph  $G_H$  heisst **Pfeilzug von  $x_0$  nach  $x_l$**  der Länge  $l$ . Wir unterscheiden:

- **offener Pfeilzug**, falls  $x_0 \neq x_l$
- **geschlossener Pfeilzug** falls  $x_0 = x_l$ ,

Beachte, dass in einem Pfeilzug die Kanten paarweise verschieden sind. Falls auch die  $x_i$  paarweise verschieden sind, so heisst  $G_H$  **Bahn von  $x_0$  nach  $x_l$**  der Länge  $l$ . Falls die  $x_i$  paarweise verschieden sind ausser  $x_0 = x_l$ , so ist  $G_H$  ein **Wirbel**.

Aus den Definitionen folgt, dass jeder offene Pfeilzug von  $a$  nach  $b$  eine Bahn von  $a$  nach  $b$  als Teilgraphen enthält, und dass jeder geschlossene Pfeilzug immer einen Wirbel als Teilgraphen enthält.

Für ungerichtete Graphen sind die Definitionen analog und wir sprechen im ungerichteten Fall von **offenen** bzw. **geschlossenen Kantenzügen** (anstelle von Pfeilzügen), sowie von **Wegen** und **Kreisen** (anstelle von Bahnen und Wirbeln).

Die Definition sind analog für Graphen mit Mehrfachkanten, wobei Mehrfachkanten wieder als verschieden betrachtet werden.

Ein Graph (gerichtet oder ungerichtet) heisst **zusammenhängend**, wenn jedes Paar von verschiedenen Knoten durch einen Weg (ungerichtet) verbunden ist.

PFEILFOLGEN BESTIMMTER LÄNGE

Eine Folge der Länge  $l$  von Kanten  $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{l-1}, x_l \rangle$  eines Graphen  $G = (V, E_0, \dots, E_k)$ , in der Kanten auch mehrfach vorkommen können, nennen wir eine **Pfeilfolge von  $x_0$  nach  $x_l$  der Länge  $l$** .

Mit der Adjazenzmatrix eines Digraphen  $G = (V, E_0, \dots, E_k)$  können wir bestimmen, wie viele verschiedene Pfeilfolgen einer bestimmten Länge es zwischen zwei Knoten gibt.

PROPOSITION 8.1. Sei  $G = (V, E_0, \dots, E_k)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ein endlicher Digraph und sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$ . Sei  $A^k$  die  $k$ -te Potenz von  $A$  für ein  $k \geq 1$ . Ist  $A^k := (a_{ij}^{[k]})$ , so ist  $a_{ij}^{[k]}$  die Anzahl der verschiedenen Pfeilfolgen von  $v_i$  nach  $v_j$  der Länge  $k$ .

*Beweis.* Mit Induktion nach  $k$ . Für  $k = 1$  folgt die Behauptung aus der Definition der Adjazenzmatrix. Es gilt also für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ :

$$a_{ij}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge 1 von } v_i \text{ nach } v_j.$$

Sei die Behauptung richtig für ein  $k \geq 1$ . Dann gilt für alle  $i, l \in \{1, \dots, n\}$ :

$$a_{il}^{[k]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_l.$$

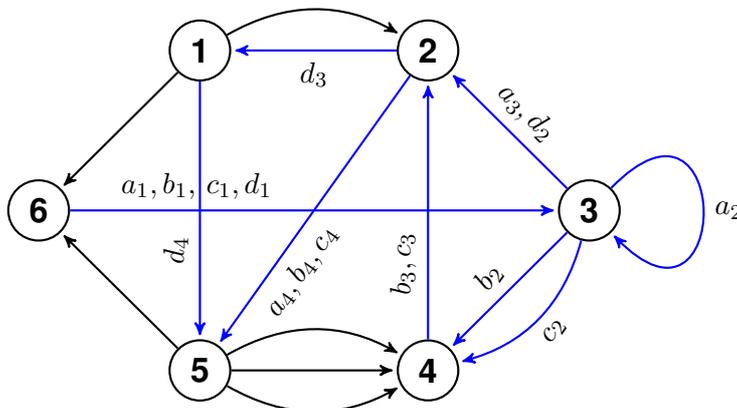
Somit gilt für jedes  $i$ , für jedes  $j$  und für jedes  $l$ :

$$a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k + 1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j \text{ via } v_l,$$

und

$$a_{ij}^{[k+1]} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k + 1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j. \quad \dashv$$

*Obiges Beispiel mit  $A^4$ :* Es gibt 4 verschiedene Pfeilfolgen  $a, b, c, d$  der Länge 4 vom Knoten 6 zum Knoten 5.



$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 14 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 11 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$