PROPOSITION 8.2. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Dann gilt:*

(a) *Ist $|E| = m$, d. h.*

$$\left|\left\{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y\rangle \in E\right\}\right| = m,$$

so ist $\sum_{x \in V} \deg(x) = 2m$.

(b) *Für alle Knoten $x \in V$ ist $\left|\left\{x \in V : \deg(x) \text{ ist ungerade}\right\}\right|$ ist gerade.*

Beweis. (a) In der Summe $\sum_{x \in V} \deg(x)$ wird jede Kante zweimal gezählt (auch bei Schlingen), denn jede Kante verbindet entweder zwei verschiedene Knoten oder sie ist eine Schlinge.

(b) Dies folgt direkt aus (a). $\dashv$

Enthält ein geschlossener Kantenzug eines Graphen G sämtliche Kanten von G, so heisst der Kantenzug **Euler'sche Linie** des Graphen G, und G heisst **Euler'scher Graph**.

PROPOSITION 8.3. *Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph G ist genau dann ein Euler'scher Graph, wenn jeder Knoten von G geraden Grad besitzt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Besitzt G eine Euler'sche Linie, so kann G in einem Zug gezeichnet werden. Somit ist beim Durchlaufen der Kanten jeder Knoten genauso oft Endpunkt wie Anfangspunkt einer Kante.

($\Leftarrow$) Hat jeder Knoten geraden Grad, so hat, weil der Graph zusammenhängend ist, jeder Knoten mindestens Grad 2.

Wir starten nun in irgend einem Knoten x_0. Da jeder Knoten geraden Grad hat, können wir von jedem von x_0 verschiedenen Knoten aus weiter gehen, und da der Graph endlich ist, müssen wir nach endlich vielen Schritten wieder zu x_0 kommen. Folglich gibt es einen geschlossenen Kantenzug beginnend in x_0.

Haben auf diesem Kantenzug alle Kanten besucht, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es auf dem Kantenzug ein Knoten x_1, von dem unbesuchte Kanten ausgehen. Deren Anzahl ist notwendigerweise gerade.

Wir beginnen nun im Knoten x_1 und gehen so lange entlang von noch nicht durchlaufenen Kanten, bis wir wieder beim Knoten x_1 ankommen. Die beiden so erhaltenen Kantenzüge können wir zu einem einzigen Kantenzug zusammenfügen, der in x_0 beginnt und endet.

Haben wir nun auf diesem Kantenzug alle Kanten besucht, so sind wir fertig. Andernfalls machen wir weiter wie oben. Da nun der Graph zusammenhängend ist, wird schliesslich jede Kante besucht und der resultierende geschlossene Kantenzug ist eine Euler'sche Linie. $\dashv$

Eine Umformulierung der obigen Proposition gibt uns den folgenden Satz von Euler.

THEOREM 8.4 (Euler). *Sämtliche Kanten eines endlichen, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen G können genau dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufen werden, wenn jeder Knoten von G geraden Grad besitzt.*

Enthält ein offener Kantenzug eines Graphen G sämtliche Kanten von G, so heisst der Kantenzug **offene Euler'sche Linie** des Graphen G.

Wie oben können wir folgende Proposition beweisen:

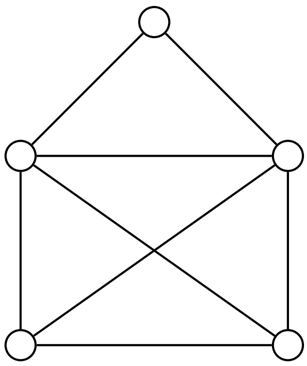
PROPOSITION 8.5. *Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph G besitzt genau dann eine offene Euler'sche Linie, wenn genau zwei Knoten von G ungeraden Grad besitzen.*

Analog zu (offene) Euler'sche Linie definieren wir **(offener) Euler'scher Pfeilzug**. Wie oben, können wir folgende Proposition beweisen.

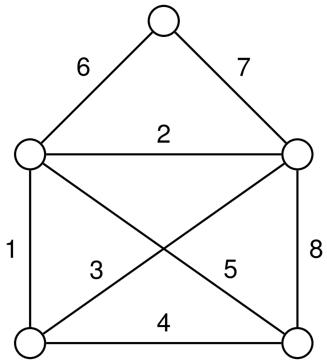
PROPOSITION 8.6. *Ein endlicher, gerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Euler'schen Pfeilzug, bzw. einen offenen Euler'schen Pfeilzug, wenn für alle $x \in V$ gilt $\deg^+(x) = \deg^-(x)$, bzw. für genau zwei Knoten $x_1, x_2 \in V$ gilt $\deg^+(x_1) - \deg^-(x_1) = 1$ und $\deg^+(x_2) - \deg^-(x_2) = -1$.*

Beispiele:

- Der folgende Graph kann in einem Zug gezeichnet werden.



Eine Möglichkeit ist zum Beispiel:



- **Dominoproblem**: Die Aufgabe ist, sämtliche Dominosteine eines Dominospiels, in dem die Augenzahlen der Steine von 0 bis 16 gehen und auch Doppelsteine mit zweimal derselben Augenzahl vorkommen, so zu einer fortlaufenden (unverzweigten) geschlossenen Kette aneinanderzureihen, dass die aneinander grenzenden Hälften zweier Steine stets dieselbe Augenzahl aufweisen.

  Um dieses Problem zu lösen betrachten den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}, \\ E &:= \big\{\{a, b\} : a, b \in V\big\}. \end{aligned}$$

  G ist dann ein regulärer Graph vom Grad 18 (der K_{17} mit 16 Schlingen enthält). Da 18 gerade ist, besitzt G eine Euler'sche Linie, und weil jede Kante als ein Dominostein aufgefasst werden kann (die Nummern der Knoten, welche durch eine Kante verbundenen werden, bezeichnen die Augenzahlen auf dem zur Kante gehörenden Dominostein), entspricht jede Euler'sche Linie in G einer Lösung des Dominoproblems.

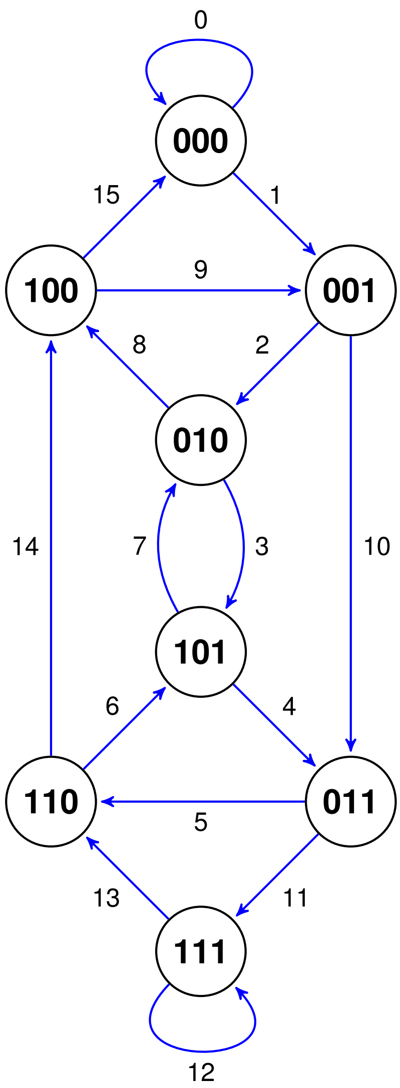
- Eine zyklische 0-1–Folge der Länge l heisst **De Bruijn–Folge**, wenn für ein $k \geq 1$ jedes binäre Wort der Länge k genau einmal als Teilwort (zyklisch) auftritt. Aus der Definition folgt, dass, falls eine solche Folge existiert, $l = 2^k$ ist.

  Wir zeigen nun, dass zu jedem k eine De Bruijn–Folge existiert: Für $k = 1$ ist die zyklische Folge 01 der Länge 2 eine De Bruijn–Folge. Sei nun $k \geq 2$. Wir betrachten den Graphen $G_k = (V, E)$ mit

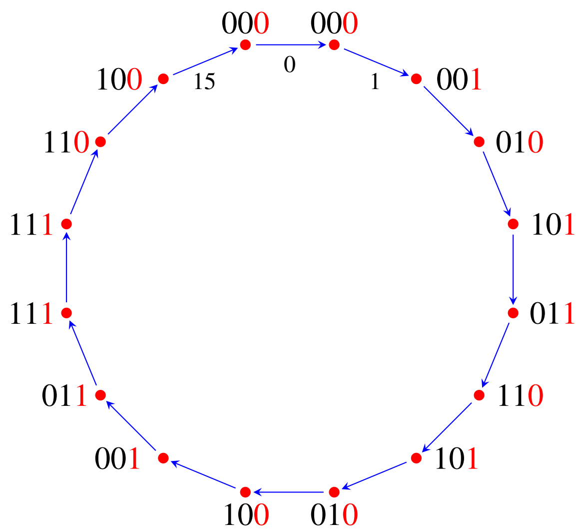
$$
\begin{aligned}
V &:= \big\{\langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle : b_i \in \{0,1\}\big\},\\
E &:= \Big\{\Big\langle \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle, \langle b_2, \ldots, b_k\rangle \Big\rangle :\ \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle, \langle b_2, \ldots, b_k\rangle \in V\Big\}.
\end{aligned}
$$

  Es ist $|V| = 2^{k-1}$ und $|E| = 2^k$. Weiter gilt für alle $x \in V$, $\deg^+(x) = \deg^-(x) = 2$, und somit enthält G_k einen Euler'schen Pfeilzug. Jeder Euler'sche Pfeilzug von G_k der Länge 2^k erzeugt in natürlicher Weise eine De Bruijn–Folge. Ein Beispiel für $k = 4$:

Euler'scher Pfeilzug



De Bruijn–Folge

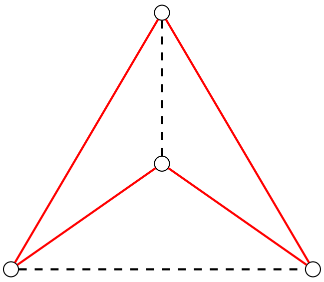


Bemerkung: Zu jedem $k \geq 1$ existieren bis auf zyklische Vertauschung genau $2^{2^{k-1}-k}$ De Bruijn–Folgen. Für $k = 1$ und $k = 2$ existieren somit nur die De Bruijn–Folgen 01 bzw. 0011, und für $k = 3$ existieren die beiden De Bruijn–Folgen 00010111 und 00011101.

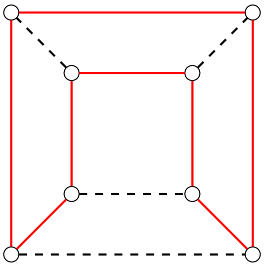
HAMILTON'SCHE GRAPHEN

Ein endlicher ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein **Hamilton'scher Graph**, bzw. G ist **hamiltonsch**, wenn G einen Kreis – einen sogenannten **Hamilton-Kreis** – besitzt der alle Knoten von G enthält. Mit anderen Worten, G ist hamiltonsch genau dann, wenn es in G einen Kreis gibt, der alle Knoten von G enthält. Es ist kein einfaches Kriterium bekannt, mit welchem entschieden werden kann, ob ein Graph hamiltonsch ist (im Gegensatz zum Beispiel zu Euler'schen Graphen).

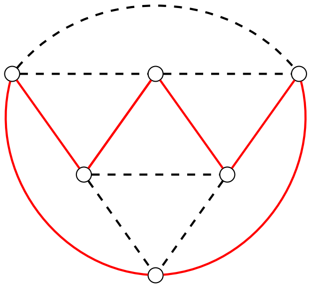
Beispiele für hamiltonsche Graphen sind die vollständigen Graphen K_n (für $n \geq 2$) sowie die Kantengraphen der fünf platonischen Körper:



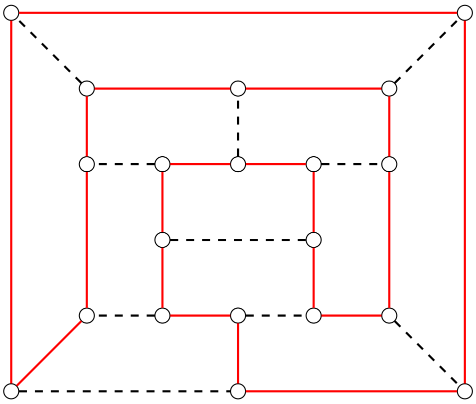
Tetraeder



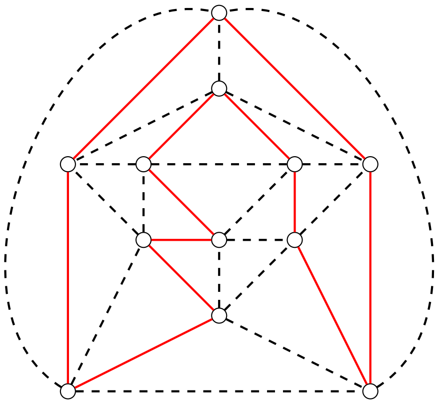
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

Ebenfalls hamiltonsch sind die Kantengraphen der k-dimensionalen Würfel (für $k \geq 2$). Dafür zeigen wir zuerst den folgenden Satz über *Gray-Codes*: Eine zyklische Folge, bestehend aus den 2^k verschiedenen binären Wörtern der Länge $k \geq 1$, heisset **Gray-Code**, falls sich je zwei aufeinander folgende Wörter in genau einer Stelle unterscheiden.

PROPOSITION 8.7. *Zu jedem $k \geq 1$ existiert ein Gray-Code.*

Beweis. Mit Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die zyklische Folge $0, 1$ der einzige Gray-Code. Ist

$$(a_1, \ldots, a_{2^k})$$

ein Gray-Code für k, wobei jedes a_i ein binäres Wort der Länge k ist, so sind die 2^{k+1} binären Wörter

$$\big(0\,a_1, \ldots, 0\,a_{2^k}, 1\,a_{2^k}, 1\,a_{2^k-1}, \ldots, 1\,a_1\big)$$

der Länge $k + 1$ ein Gray-Code für $k + 1$. ⊣

KOROLLAR 8.8. *Der Kantengraph des k-dimensionalen Würfels (für $k \geq 2$) ist hamiltonsch.*

Beweis. Die binären Wörter der Länge k können als Ecken eines k-dimensionalen Würfels aufgefasst werden. Ein Gray-Code entspricht dann einem Hamilton-Kreis im Kantengraphen des k-dimensionalen Würfels. ⊣

Beispiel: Im Fall $k = 4$ gibt uns der Beweis von Proposition 8.7 den folgenden Gray-Code mit dem entsprechenden Hamilton-Kreis im Kantengraphen des 4-dimensionalen Würfels.

Gray-Code

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	0	1
1	0	0	0

Hamilton-Kreis