Lineare Algebra - Lösungen 2

1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Aussagen Tautologien sind. Negieren Sie die restlichen.

    1. Es ist Winter und schneit.
    2. Es schneit oder es schneit nicht.
    3. Jeder Student besucht genau eine Vorlesung.
    4. Jeder Student besucht mindestens eine Vorlesung.
    5. Mindestens ein Student besucht zwei Vorlesungen.
    6. Jeder Student besucht keine oder mindestens eine Vorlesung.
    7. Genau ein Student traegt einen roten Schal und besucht alle Vorlesungen.

Solution: 1. Ist keine Tautologie, denn es kann Winter sein, jedoch nicht schneien.
Die Negation ist: Es ist nicht Winter oder es schneit nicht 2. Ist eine Tautologie. Wenn wir die Aussage B: es schneit betrachten, so ist die getätigte Aussage in mathematischer Form gegeben durch

$$B \vee \neg B.$$

Eine Wahrheitstabelle liefert sofort, dass es sich hier um eine Tautologie handelt.
3. Das ist wieder keine Tautologie. Die meisten von Ihnen besuchen wahrscheinlich mehr als eine Vorlesung.
Die Negation ist: Es gibt eine:n Student:in, der keine einzige, oder mehr als eine Vorlesung besucht.
4. Das ist auch keine Tautologie. Es könnte durchaus der Fall sein, dass es Studierende gibt, die keine einzige Vorlesung besuchen.
Die Negation ist: Es gibt eine:n Student:in, der keine Vorlesung besucht.
5. Diese Aussage könnte richtig sein, sie könnte aber auch falsch sein. Daher ist das keine Tautologie.
Die Negation ist: Kein:e Student:in besucht zwei Vorlesungen.
6. Das ist eine Tautologie. Es gibt nur die Möglichkeiten keine, oder zumindest eine Vorlesung zu besuchen. Daher erfüllen alle Studierenden diese Bedingung zwangsweise.
7. Das ist keine Tautologie.
Die Negation ist: Alle Studierende tragen keinen roten Schal oder besuchen nicht alle Vorlesungen; oder es gibt 2 oder mehr Studierende, die einen roten Schal tragen und alle Vorlesungen besuchen.

2. Es sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine Fuktion.
    (a) Schreiben Sie folgende Aussage mit Hilfe der Quantoren:
    Fuer all $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass folgende Aussage gilt: fuer alle x, y in dem Intervall $(0,1)$, die $|x-y| < \delta$ erfuellen, gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
    (b) Negieren Sie die Aussage.

Solution:

(a) Die Aussage als mathematischer Ausdruck mit Quantoren schaut folgendermassen aus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (0,1) : (|x-y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(b) Die Negation der Aussage ist

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in (0,1) : (|x-y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

(Die Klammernsetzung um manche Teilausdrücke ist nicht verpflichtend, manchmal kann das Weglassen von Klammern den Ausdruck anschaulicher machen. Natürlich darf sich durch das Weglassen der mathematische Inhalt des Ausdrucks nicht ändern.)

3. Es seien A und B Aussagen. Beweisen Sie

(a) $A \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg A)$;

(b) $\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee \neg B$;

(c) $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$.

Solution: Bevor wir beginnen erinnern wir uns daran, dass Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$) nichts anderes bedeutet als $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Das heisst, A impliziert B und B impliziert A.

(a) Um zu zeigen, dass diese Aussage war ist sehen wir uns eine Wahrheitstabelle an.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	A$\Rightarrow \neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Rightarrow A$	A $\Leftrightarrow \neg(\neg A)$
w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w

Wir sehen, dass die Spalte von $A \Leftrightarrow \neg A$ nur den Wahrheitswert w (wahr) annimmt. Somit ist die zu zeigende Äquivalenz eine Tautologie und daher immer wahr.

(b) Auch hier hilft eine Wahrheitstabelle weiter.

A	B	A$\wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w

Wir erkennen, dass die Spalten von $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ in jeder einzelnen Zeile dieselben Wahrheitswerte annehmen. Dementsprechend sind diese Aussagen logisch äquivalent.

(c) Um eine andere Beweisvariante zu betrachten, verwenden wir für diesen Teil keine Wahrheitstabelle.

Die linke Seite $(\neg(A \vee B))$ der Äquivalenz ist genau dann wahr, wenn weder A noch B wahr sind - mit anderen Worten, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Denn $A \vee B$ ist genau dann wahr, falls zumindest eine der beiden Aussagen A oder B wahr sind.
Die rechte Seite $(\neg A \wedge \neg B))$ der Äquivalenz ist genau dann wahr, falls sowohl $\neg A$ als auch $\neg B$ wahr sind. Das heisst, die Aussage ist genau dann wahr falls sowohl A als auch B falsch sind. Das ist aber genau dieselbe Aussage wie für die linke Seite. Daher sind diese Aussagen logisch äquivalent.

4. Loesen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{F}_5$:
   (a) $2 + 3x = 1$;
   (b) $4x + 1 = 2$;
   (c) $x^2 = 3$.

Solution:

(a) Gesucht ist $x \in \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sodass

$$2 + 3x = 1$$

gilt. Wir addieren -2 auf beiden Seiten und erhalten

$$3x = -1 = 4. \tag{1}$$

Hier haben wir verwendet, dass in dem Körper $\mathbb{F}_5$ -1 und 4 dieselben Elemente sind, denn $4 - (-1) = 5 = 0$. Nun suchen wir das multiplikative inverse von 3 in $\mathbb{F}_5$. Wir sehen, dass 2 die gesuchte Zahl ist, denn

$$2 \cdot 3 = 6 = 1.$$

Wir multiplizieren (1) mit 2 auf beiden Seiten und erhalten die Lösung

$$x = 2 \cdot 4 = 8 = 3$$

in $\mathbb{F}_5$.

(b) Wir lösen Die Gleichugn wie folgt:

$$\begin{aligned} 4x + 1 = 2 \quad &\Leftrightarrow \\ 4x = 1 \quad &\Leftrightarrow \\ x = 4, \quad & \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile verwendet haben, dass 4 das multiplikative Inverse von 4 in $\mathbb{F}_5$ ist.

(c) Im Gegensatz zu den vorherigen Teilen haben wir es hier mit einer quadratischen Gleichung, und keiner linearen Gleichung zu tun. Wir vermuten, dass es, analog wie in den reellen Zahlen, womöglich 2 Lösungen für $x^2 - 3 = 0$ in $\mathbb{F}_5$ geben könnte. Denn falls $y \in \mathbb{F}_5$ diese Gleichung löst, dann löst sicherlich auch $-y$ die Gleichung. Da 5 ungerade ist, gilt ausserdem $y \neq -y$ in $\mathbb{F}_5$.
Sehen wir uns nun eine Tabelle mit den quadratischen Werten der Elemente in $\mathbb{F}_5$ an

x	x^2	x^2 mod 5
0	0	0
1	1	1
2	4	4
3	9	4
4	16	1

Tatsächlich gibt es also **keine** Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ in $\mathbb{F}_5$.

5. Es ei $p > 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_p$ folgendes gilt:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = p - 1.$$

Solution: Um diese Aufgabe zu lösen betrachten wir zunächst die quadratische Gleichung

$$x^2 = 1 \tag{2}$$

in $\mathbb{F}_p$. Diese Gleichung hat offensichtlich die Lösung $y = 1$ und damit auch $-y = -1 = p - 1$. Es kann ausserdem keine Weiteren Lösungen geben, da wir die Gleichung umschreiben können als

$$0 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

also in ein Produkt von zwei linearen Faktoren. Mehr als zwei Nullstellen hat dieses Polynom also sicherlich nicht.
Multiplizieren wir (2) mit dem multiplikativen Inversen von x (unter Annhame, dass x nicht null ist), erhalten wir, dass die Gleichung

$$x = x^{-1}$$

also nur 2 Lösungen in $\mathbb{F}_p$ besitzt. Mit anderen Worten, das multiplikative Inverse einer Zahl $x \in \mathbb{F}_p$, die nicht 1 oder -1 ist, ist verschieden von x.
Nun können wir das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$$

betrachten. Da in diesem Produkt für alle Zahlen $x \in \{2, \dots, p-2\}$ auch das multiplikative inverse von x vorkommt, können wir die Faktoren passend vertauschen und erhalten das gewünschte Resultat

$$1 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) \cdot (3 \cdot 3^{-1}) \cdot \dots \cdot (p-1) = 1 \cdot (p-1) = p-1. \tag{3}$$

Wichtig ist hier zu betonen, dass nur $\frac{p-3}{2}$ Produkte der Form $(x \cdot x^{-1})$ in dem obigen Produkt vorkommen. Denn insgesamt gibt es $p-3$ Zahlen zwischen 2 und $p-2$, jedoch stecken in jedem solchen Produkt $(x \cdot x^{-1})$ ja schon 2 dieser Elemente.
Im Fall $p = 5$ ist zum Beispiel 3 das multiplikaitve inverse von 2. Trotzdem sind im Produkt (3) beide Faktoren $(2 \cdot 2^{-1})$ und $(3 \cdot 3^{-1})$ vorhanden - das ist formal nicht ganz korrekt, sondern soll nur die Idee des umschreibens der Faktoren im Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$$

symbolisieren.