

Lineare Algebra - Lösungen 4

1. Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^4 sind reelle Unterräume?

$$V_1 := \{ (0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$V_2 := \{ (x^4, x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$V_3 := \{ (x, x + y, x - y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$V_4 := \{ (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$V_5 := \{ (x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}, x > y \}.$$

Solution: Eine Teilmenge ist genau dann ein reeller Untervektorraum, wenn sie den Nullvektor enthält und für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente u, v aus der Teilmenge, das Element $u + \lambda v$ auch in der Teilmenge liegt.

Zuerst überprüfen wir, ob das Nullelement $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ in den Teilmengen enthalten ist. Wir sehen, dass $(0, 0, 0, 0)$ ein Element der Teilmengen V_1, V_2, V_3 und V_4 ist (in dem wir x und y gleich 0 setzen). Der Nullvektor ist jedoch nicht in V_5 enthalten, somit ist V_5 sicherlich kein Unterraum.

Überprüfen wir also noch die zweite Bedingung für die ersten vier Teilmengen:

V_1 : Für beliebige Elemente $u = (0, x, 2x, 3x)$ und $v = (0, y, 2y, 3y)$ aus V_1 und für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$u + \lambda v = (0, x + \lambda y, 2(x + \lambda y), 3(x + \lambda y)).$$

Das Element $u + \lambda v$ ist also wieder in V_1 . Das zeigt, dass V_1 ein Unterraum ist.

V_2 : Sei $v = (1, 1, 1, 1) \in V_2$. Der Vektor $2v = (2, 2, 2, 2)$ liegt nicht in V_2 , denn es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $(2, 2, 2, 2) = (x^4, x^3, x^2, x)$. Folglich ist V_2 kein Unterraum.

V_3 : Seien $u = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1)$ und $v = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2)$ zwei beliebige Elemente aus V_3 und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen

$$u + \lambda v = (x_1 + \lambda x_2, (x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2), (x_1 + \lambda x_2) - (y_1 + \lambda y_2), y_1 + \lambda y_2)$$

liegt $u + \lambda v$ wieder in V_3 . Die Teilmenge V_3 ist also ein Unterraum.

V_4 : Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ sodass $t = x^4 - y^4$ ist (Falls $t \geq 0$ ist, sei $x := t^{1/4}$ und $y := 0$ und falls $t < 0$ ist, sei $x = 0$ und $y = (-t)^{1/4}$). Es gilt also

$$V_4 = \{ (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \{ (t, 0, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Für beliebige Elemente $u = (t_1, 0, 0, 0)$ und $v = (t_2, 0, 0, 0)$ dieser Teilmenge und ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt $u + \lambda v = (t_1 + \lambda t_2, 0, 0, 0)$. Das Element $u + \lambda v$ ist also wieder in V_4 , also ist V_4 ein reeller Unterraum.

2. Es sei \mathbb{K} ein Körper und $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von V ?

(a)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

(b)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

(c)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

(d)

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

Geben Sie für jeden Unterraum ein Erzeugendensystem an, d.h. finden Sie Vektoren w_1, w_2, \dots, w_n , sodass die ülle

$$\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$$

der entsprechende Unterraum ist.

Solution:

(a) Die Matrix $\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist der Nullvektor in $\text{Mat}_{2,2}(\mathbb{K})$. Aber $\mathbf{0} \notin W$. Also ist W kein Unterraum.

Tatsächlich ist hier W die Teilmenge aller *invertierbaren* Matrizen!

(b) Sicherlich gilt $\mathbf{0} \in W$. Seien $a, b, c, e, f, g, \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda e & b - \lambda f \\ c - \lambda g & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Also ist W ein Unterraum. Ein Erzeugendensystem bilden zum Beispiel die drei Matrizen $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$W = \langle e_{11}, e_{12}, e_{21} \rangle.$$

(c) Sicherlich gilt wieder $\mathbf{0} \in W$. Seien $a, b, c, e, f, g, \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda e & b - \lambda f \\ c - \lambda g & a - \lambda e \end{pmatrix} \in W$$

Also ist W ein Unterraum. Ein mögliches Erzeugendensystem sind die drei Matrizen $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$W = \langle d, e_{12}, e_{21} \rangle.$$

(d) Das ist kein Unterraum, denn $\mathbf{0} \notin W$.

3. Sei X eine Menge, V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} , und $\mathcal{F}(X, V)$ der \mathbb{K} -Vektorraum aller Abbildungen von X nach V , mit punktweiser Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in X \forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

und punktweiser skalarer Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall x \in X \forall f \in \mathcal{F}(X, V) \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Seien $y \in X$ und $v \in V$ fixiert, sowie $\mathcal{F}_{y,v} := \{f \in \mathcal{F}(X, V) \mid f(y) = v\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{y,v}$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $v = 0$.
(b) Finden Sie einen Unterraum $W \subset \mathcal{F}(X, V)$, so dass

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{y,0} + W,$$

sowie $W \cap \mathcal{F}_{y,0} = \{0_{\mathcal{F}}\}$ gilt, wobei $0_{\mathcal{F}}$ der Nullvektor ist.

Solution: Bevor wir die Aufgabenteile lösen, bemerken wir, dass der Nullvektor in diesem Vektorraum die Nullfunktion $0_{\mathcal{F}}$, d.h. die Funktion die durch

$$0_{\mathcal{F}}(x) = 0_V \quad \text{für alle } x \in X,$$

definiert ist.

- (a) " \Rightarrow " Angenommen $\mathcal{F}_{y,v}$ ist ein Unterraum. Dann gilt insbesondere $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{y,v}$. Das impliziert

$$0_V = 0_{\mathcal{F}}(y) = v.$$

Also folgt $v = 0$.

" \Leftarrow ": Sei also $v = 0_V$. Dann ist der Nullvektor $0_{\mathcal{F}}$ sicherlich in $\mathcal{F}_{y,v}$ enthalten. Seien nun $f, g \in \mathcal{F}_{y,v}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann folgt

$$(f + \lambda \cdot g)(y) = f(y) + (\lambda \cdot g)(y) = f(y) + \lambda g(y) = 0_V + \lambda 0_V = 0_V.$$

Somit liegt auch die Funktion $f + \lambda \cdot g$ in $\mathcal{F}_{y,v}$. Also ist $\mathcal{F}_{y,v}$ ein Unterraum.

- (b) Wir behaupten, dass wir für W den Unterraum aller konstanten Funktionen verwenden können. Sei für jedes $v \in V$ die konstante Funktion

$$\mathbf{1}_v(x) = v \quad \text{für alle } x \in X,$$

definiert. Wir definieren den Unterraum

$$W = \{\mathbf{1}_v : v \in V\}.$$

Dass diese Teilmenge wirklich ein Unterraum ist, folgt aus der Tatsache, dass V ein Vektorraum ist.

Somit gilt für jedes Element $f \in W \cap \mathcal{F}_{y,0}$, dass f einerseits konstant ist, und andererseits $f(y) = 0_V$ erfüllt, also folgt $f = \mathbf{0}_{\mathcal{F}}$.

Des Weiteren können wir eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}(X, V)$ schreiben als

$$f = (f - \mathbf{1}_{f(y)}) + \mathbf{1}_{f(y)}.$$

Wir sehen, dass $\mathbf{1}_{f(y)} \in W$ und

$$(f - \mathbf{1}_{f(y)})(y) = f(y) - \mathbf{1}_{f(y)}(y) = f(y) - f(y) = 0_V,$$

also $f - \mathbf{1}_{f(y)} \in \mathcal{F}_{y,0}$ erfüllt sind. Das heisst es gilt

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{y,0} + W,$$

was zu zeigen war.

4. Gegeben seien die Unterräume

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von \mathbb{R}^3 . Bestimmen Sie den Durchschnitt $V \cap U$ und finden Sie ein Erzeugendensystem.

Solution: Wir setzen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und versuchen eine gemeinsame Linearkombination der Vektoren zu finden. Das heisst, wir suchen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sodass

$$av_1 + bv_2 = cw_1 + dw_2$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}b &= c + d \\a &= -c - 2d \\-2a &= d.\end{aligned}$$

Alle Lösungen dieses Gleichungssystems sind gegeben durch $a = t, b = t, c = 3t, d = -2t$ für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$V \cap U = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = t(v_1 + v_2), \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also ist der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem.

5. Sei V die lineare Hülle der Vektoren

$$(1 \ 2 \ 3), \quad (4 \ 5 \ 6), \quad (7 \ 8 \ 9)$$

in $M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau V ist.

Solution: Wir bemerken, dass der mittlere Eintrag jeder der drei Vektoren genau das Mittel der beiden äusseren ist. Das heisst alle drei Vektoren erfüllen die Gleichung

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}.$$

Andererseits lässt sich jeder Vektor $(x_1 \ x_2 \ x_3)$, der $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ erfüllt, als Linearkombination der drei Vektoren schreiben. Denn setzen wir

$$\begin{aligned}a + 7c &= x_1 \\3a + 9c &= x_3,\end{aligned}$$

erhalten wir $a = \frac{7x_3 - 9x_1}{12}$ und $c = \frac{3x_1 - x_3}{12}$.

Wir überprüfen die Gleichung

$$2a + 8c = x_2$$

und folgern somit

$$(x_1, x_2, x_3) = a \cdot (1 \ 2 \ 3) + c \cdot (7 \ 8 \ 9)$$

V ist also genau die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (S) gegeben durch

$$(S): x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

6. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

- (a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von V .
- (b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.
- (c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.
- (d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

Hinweis: Die lineare Hülle der leeren Menge $\langle \emptyset \rangle$ ist per Definition der triviale Unterraum $\{0_V\}$.

Solution:

(a) Ja, W ist ein Unterraum. Es gilt $W = \langle v \rangle$.

(b) " \Leftarrow ": Angenommen $W = \langle W \rangle$, dann ist W ein Unterraum, da jede lineare Hülle ein Unterraum.

" \Rightarrow ": Angenommen W ist ein Unterraum. Dann liegt aber jede endliche Linearkombination von Elementen aus W wieder in W . Somit folgt $\langle W \rangle \subseteq W$. Die andere Inklusion ist klar. Somit folgt $W = \langle W \rangle$.

(c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

" \supseteq ": Da $S_i \subset S_1 \cup S_2$ für $i = 1, 2$, folgt nach der Definition der linearen Hülle, dass $\langle S_i \rangle \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$ gilt. Also folgt auch, dass die Summe zweier Elemente aus $\langle S_1 \rangle$ und $\langle S_2 \rangle$ in $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ liegt, da letzteres ja ein Unterraum ist. Es folgt also $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.

" \subset ": $S_i \subset \langle S_i \rangle \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$, also gilt auch $S_1 \cup S_2 \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$. Da $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ ein Unterraum ist, liegt auch jede endliche Linearkombination von Elementen aus $S_1 \cup S_2$ in diesem Unterraum. Das heisst $\langle S_1 \cup S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

(d) Diese Aussage ist falsch. Angenommen $V = \mathbb{R}^2$ und $S_1 = (1, 0)$ und $S_2 = (3, 0)$. Dann gilt

$$\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$$

jedoch sind $\langle S_1 \rangle$ und $\langle S_2 \rangle$ dieselben Unterräume. Also ist

$$\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$