Lineare Algebra - Lösungen 5

1. Welche der folgenden Vektoren sind linear unabhängig?
   (a) $(1,0,0,1),\ (2,3,-3,9),\ (1,3,-4,7),\ (2,0,1,3)$
   (b) $(1,2,3,4),\ (-3,4,2,8),\ (-3,9,1,3)$
   (c) $1+i, 1-i$, wobei $\mathbb{C}$ als zweidimensionaler *reeller* Vektorraum aufgefasst wird
   (d) $1+i, 1-i$, wobei $\mathbb{C}$ als eindimensionaler *komplexer* Vektorraum aufgefasst wird
   (e) $\sin(x),\ \sin(x+1),\ \sin(x+2)$, im Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
   (f) $\sin(0x),\ \sin(1x),\ \sin(2x)$, im Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
   (g) $\{\phi_n \mid n = 0,1,2,\dots\}$, wobei $\phi_n(x) := 1/(x+n),\ x \neq \{0,-1,-2,...\}$.

   Hinweis: Für (g) kann es hilfreich sein zu bemerken, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

Solution:

(a) Es gilt
$$(1,0,0,1) + (2,3,-3,9) = (1,3,-4,7) + (2,0,1,3),$$
also sind die Vektoren linear abhängig.

(b) Aus
$$a \cdot (1,2,3,4) + b \cdot (-3,4,2,8) + c \cdot (-3,9,1,3) = 0$$
folgt in der ersten Koordinate $a = 3(b+c)$. Eingesetzt in die drei weiteren Koordinaten ergibt sich das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcl} 10b & + & 15c & = & 0, \\ 11b & + & 10c & = & 0, \\ 20b & + & 15c & = & 0. \end{array}$$
Durch Subtrahieren der ersten Zeile von der dritten ergibt sich $10b = 0$ und somit $b = 0$, womit sofort $c = 0$ und dann $a = 0$ folgt. Also sind die 3 Vektoren linear unabhängig.

(c) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, indem wir eine komplexe Zahl $x + iy$ mit dem Vektor (x,y) identifizieren. Die beiden komplexen Zahlen aus der Aufgabe entsprechen also den Vektoren $(1,1)$ und $(1,-1)$ aus $\mathbb{R}^2$, welche offensichtlich linear unabhängig sind.

(d) Über $\mathbb{C}$ sind die beiden komplexen Zahlen linear abhängig, denn es gilt
$$(1+i) - i(1-i) = 0.$$

(e) Es gilt
$$\begin{array}{rcl} \sin(x+2) & = & \sin(x)\cos(2) + \cos(x)\sin(2), \\ \sin(x+1) & = & \sin(x)\cos(1) + \cos(x)\sin(1). \end{array}$$

Auflösen der zweiten Zeile nach $\cos(x)$ und einsetzen in der ersten ergibt nacheinander

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{\sin(x+1) - \sin(x)\cos(1)}{\sin(1)}, \\
\Rightarrow \sin(x+2) &= \sin(x)\cos(2) + \sin(2) \cdot \frac{\sin(x+1) - \sin(x)\cos(1)}{\sin(1)} \\
&= \sin(x) \cdot \left(\cos(2) - \frac{\cos(1)\sin(2)}{\sin(1)} \right) + \sin(x+1) \cdot \frac{\sin(2)}{\sin(1)} \\
&= -\sin(x) + \sin(x+1) \cdot \frac{\sin(2)}{\sin(1)}.
\end{aligned}$$

Somit sind die 3 Vektoren linear abhängig.

(f) Die drei Vektoren sind linear abhängig, da $\sin(0x) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Menge von Vektoren, welche 0 enthält ist automatisch linear abhängig.

(g) Wir verwenden vollständige Induktion über n und wollen beweisen, dass die Vektoren ϕ_n linear unabhängig sind.

Die Aussage ist klar für $n = 0$, da $\frac{\lambda}{x}$ nur für $\lambda = 0$ die Nullfunktion ist.

Sei die Aussage nun wahr für $n = k$. Betrachte die Linearkombination $a_0\phi_0 + \ldots + a_{k+1}\phi_{k+1}$: Falls $a_{k+1} = 0$, so ist die Aussage nach Induktionsvoraussetzung wahr. Sonst schreiben wir die Summe als

$$\frac{\sum\limits_{0 \le i \le k} \left(a_i \cdot \prod\limits_{\substack{0 \le j \le k \\ j \neq i}} (x+j) \right)}{\prod\limits_{0 \le i \le k} (x+i)} + \frac{a_{k+1}}{(k+1)+x} = 0.$$

Umformen ergibt

$$(x + (k+1)) \left(\sum_{0 \le i \le k} a_i \prod_{\substack{0 \le j \le k \\ j \neq i}} (x+j) \right) = -a_{k+1} \prod_{0 \le i \le k} (x+i).$$

Dies sind zwei Polynome in x. Auf der linken Seite ist $(x + (k+1))$ ein Teiler, also muss es auch das Polynom auf der rechten Seite teilen (als Polynom!). Dies ist aber nur möglich, falls $a_{k+1} = 0$ gilt.

2. Im $\mathbb{R}^5$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wählen Sie aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ bzw. $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ bilden.

Solution: Man sieht direkt, dass $v_2 = -v_3$ ist. Durch Umwandlung der Matrix mit den Spalten v_1, v_3, v_4 in reduzierte Zeilenstufenform erhält man eine invertierbare 5×5 Matrix W (vergleiche mit der Aufgabe 3 der Übungen 3), sodass

$$W \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Da die Spalten der Matrix auf der rechten Seite linear unabhängig sind und W invertierbar ist, folgt mit Aufgabe 6 in diesen Übungen für die Matrix W^{-1}, dass die Vektoren v_1, v_3, v_4 linear unabhängig sind und eine Basis von $\langle v_1, \ldots, v_4 \rangle$ bilden. Alternativ bilden auch die Vektoren v_1, v_2, v_4 eine Basis.

Analog erhält man durch Umwandlung der Matrix $A = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ in reduzierte Zeilenstufenform eine Matrix W, sodass $W \cdot A = B$ wobei

$$W := \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & -8 & 4 & 1 \\ \frac{17}{6} & \frac{1}{4} & \frac{-55}{12} & \frac{31}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-11}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 10 & 1 & -18 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gelten. Da die Spalten von B linear unabhängig sind und die Matrix W invertierbar ist, folgt wieder mit Aufgabe 6 in diesen Übungen für die Matrix W^{-1} auch die Vektoren $w_1, \ldots, w_4$ linear unabhängig und bilden folglich eine Basis von $\langle w_1, \ldots, w_4 \rangle$.

3. Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_2$ und sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subset K^5.$$

Finden Sie ein minimales Erzeugendensystem $S' \subset S$ von S, also ein Erzeugendensystem S' von $\langle S \rangle$, sodass keine echte Teilmenge von S' ein Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ ist.

Solution: Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

und sei

$$A := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$$

die (5×5)-Matrix mit den Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_5$.

Wir beginnen mit der Umwandlung von A in reduzierte Zeilenstufenform aber achten darauf, dass wir nur Operationen verwenden, die sowohl in $\mathbb{Q}$ als auch in $\mathbb{F}_2$ erlaubt sind, also insbesondere teilen wir nicht durch 2. Sei W die invertierbare Matrix, die durch Linksmultiplikation unserer durchgeführten elementaren Zeilenoperationen entsteht. Wir erhalten die (noch nicht ganz reduzierte) Zeilenstufenform

$$WA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 die Spaltenvektoren von WA. Für alle $1 \le i \le 5$ gilt $w_i = Wv_i$ und daher auch $W^{-1}w_i = v_i$. Wir sehen, dass $w_4 = w_1 - w_2$ ist. Durch Multiplikation mit W^{-1} gilt daher auch $v_4 = v_1 - v_2$. Somit ist $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ bereits ein Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$. Für $K = \mathbb{Q}$ sind w_1, w_2, w_3, w_5 linear unabhängig und mit Aufgabe 6 für die Matrix W^{-1} folgt, dass auch v_1, v_2, v_3, v_5 linear unabhängig sind. Daher ist $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ im Fall $K = \mathbb{Q}$. Für $K = \mathbb{F}_2$ haben wir die zusätzliche Gleichung $w_5 = w_1 + w_2 - w_3$ (denn $-2 = 0$ in $\mathbb{F}_2$), aber die Vektoren w_1, w_2, w_3 sind immer noch linear unabhängig. Aus den gleichen Gründen wie vorher ist also $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\langle S \rangle$ im Fall $K = \mathbb{F}_2$.

4. Seien $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

(b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

Beweisen Sie, dass $\langle A_1, A_2 \rangle = M$.

(c) Finden Sie $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist.
Ist $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Solution:

(a) Angenommen A_1, A_2 sind linear abhängig. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei nicht beide gleich 0 sind, so dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha + \beta & 3\alpha \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also folgt aus dem komponentenweisen Vergleich der Einträge, dass $\alpha = \beta = 0$ und somit sind A_1, A_2 linear unabhängig.

(b) Aus der Rechnung im ersten Teil folgt, dass $\langle A_1, A_2 \rangle \subset M$. Wir müssen also nur zeigen, dass $M \subset \langle A_1, A_2 \rangle$, d.h. dass jede Matrix $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right)$ mit $b - a = f$ und $3a = c$ in $\langle A_1, A_2 \rangle$ enthalten ist. Wir zeigen $B = aA_1 + (f - a)A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a + f & 3a \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f - a & 0 \\ 0 & 0 & f - a \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + (f - a)A_2 \end{aligned}$$

(c) Sei $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Angenommen $\{A_1, A_2, A_3\}$ wäre linear abhängig. Dann gäbe es α, β, γ nicht alle drei gleich 0 sind, so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha + \beta & 3\alpha \\ \gamma & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

und folglich $\alpha, \beta, \gamma = 0$. Das ist ein Widerspruch, und daher ist $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig. Sei $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right) \in \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, dann zeigt obige Rechnung, dass $e = 0$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \setminus \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ und somit kann $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ nicht gleich der linearen Hülle von $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ sein. Das könnte man auch leicht mittels Vergleich der Dimensionen von $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ und $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ begründen!

5. Es sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle$$

eine lineare Hülle in $\mathbb{R}^3$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dieser linearen Hülle enthalten sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution: Zuallererst beobachten wir, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ nur Dimension 3 hat. Dementsprechend kann es nur maximal 3 linear unabhängige Vektoren in der Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$$

geben. Geschicktes ausprobieren bringt uns auf die beiden Gleichungen

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix},$$

das heisst sowohl der vierte, als auch der dritte Vektor in der Menge sind linear abhängig von den beiden ersten Vektoren. Dementsprechend gilt

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nach dieser Vorarbeit, können wir uns der tatsächlichen Aufgabe zuwenden.

(a) Damit v_1 in U enthalten ist, muss es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix}.$$

Da der zweite Eintrag im Vektor v_1 gleich 0 ist, folgt $\alpha = 0$. Daher müsste $\beta = \frac{1}{5}$ erfüllen (erster Eintrag von v_1), aber auch $\beta = 0$ (letzte Eintrag von v_1). Das geht natürlich nicht.

Also ist v_1 nicht in U enthalten.

(b) Für v_2 gilt, dass

$$v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix},$$

nur erfüllt sein kann, falls $\alpha = 2$ ist (zweiter Eintrag von v_2). Für $\beta = -1$ sind stimmen dann auch der erste und dritte Eintrag mit v_2 überein. Daher gilt $v_2 \in U$.

(c)

(d) Für v_3 gilt, dass

$$v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix},$$

nur erfüllt sein kann, falls $\alpha = -1$ ist (zweiter Eintrag von v_3). Daher müsste $\beta = \frac{1}{3}$ erfüllen (erster Eintrag von v_3), aber auch $\beta = \frac{9}{5}$ (letzte Eintrag von v_3). Das geht wieder nicht. Also ist v_3 nicht in U enthalten.

6. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

Solution: Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_m \in K$. Multiplikation mit A liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{m} a_i A v_i = A \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_i v_i) = A \cdot 0 = 0.$$

Also sind auch $Av_1, \ldots, Av_n$ linear abhängig.

Sind umgekehrt $Av_1, \ldots, Av_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{m} a_i A v_i = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_m \in K$. Multiplikation mit A^{-1} liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = A^{-1} \cdot A \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_i v_i) = A^{-1} \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_i A v_i) = A^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Also sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

7. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Solution: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind linear unabhängig genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $x_1 v_1 + \ldots + x_4 v_4$ nur die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_4 = 0$ hat. Durch Umformung in reduzierte Zeilenstufenform oder direktes Ausprobieren erhält man zum Beispiel die Gleichung

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.