Lineare Algebra - Lösungen 8

1. Seien $\mathcal{B}_1 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B}_2 := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   Sei $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

   (a) Machen Sie sich anhand einer Zeichnung klar, dass die drei Vektoren von $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$ bezüglich $\mathcal{E}$ jeweils nicht in einer Ebene liegen ($\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ sind *Basen*).

   (b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T_1 (bzw. T_2) des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ (bzw. von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$).

   (c) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass $T_1\, T_2 = T_2\, T_1 = I$ gilt.

Solution:

(a) (hier könnte eine Zeichnung sein)

(b) Seien $\mathcal{B}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{B}_2 = (y_1, y_2, y_3)$. Wir wollen die Vektoren von $\mathcal{B}_1$ als linear kombination der Vektoren von $\mathcal{B}_2$ schreiben. Also ist

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} (T_1)_{ji}\, y_j$$

und

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} (T_2)_{ji}\, x_j.$$

Durch Lösen von drei 3×3-Gleichungssystemen für die 9 Koeffizienten von z.B. T_2 folgt:

$$\begin{aligned} y_1 &= -3\,x_1 - 7\,x_2 + 3\,x_3 \\ y_2 &= -x_1 - 4\,x_2 + 3\,x_3 \\ y_3 &= -x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Indizes folgt:

$$T_2 = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = ([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sei $T : V \to W$ eine invertierbare lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W. Geben Sie einen Beweis oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgende Aussage:

$$\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

Solution: Diese Aussage ist falsch. Im allgemeinen gilt

$$\left([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Nicht einmal wenn $V = W$ gilt, und die Abbildung $[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ auch definiert ist gilt diese Aussage. Wir betrachten das folgende Gegenbeispiel. Es sei $V = W = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis, sowie $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ wobei

$$c_1 = 3e_1 + 4e_2, \quad c_2 = 2e_1 + 3e_2,$$

gilt. Sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, definiert auf der Basis $\mathcal{B}$ durch

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_2, \\ T(e_2) &= e_1 - 3e_2. \end{aligned}$$

Dann ist $T(e_1) = -2c_1 + 3c_2$ sowie $T(e_2) = 9c_1 - 13c_2$. Somit gilt

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}.$$

Die inverse lineare Abbildung T^{-1} ist auf der Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} T^{-1}(e_1) &= 3e_1 + e_2, \\ T^{-1}(e_2) &= e_1, \end{aligned}$$

denn $T(e_1) = e_2$ und $T(3e_1 + e_2) = e_1$.
In der Basis $\mathcal{C}$ ausgedrückt ergibt das

$$\begin{aligned} T^{-1}(e_1) &= 7c_1 - 9c_2, \\ T^{-1}(e_2) &= 3c_1 - 4c_2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

und somit

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 24 \\ 6 & -29 \end{pmatrix}$$

was nicht die Identitätsmatrix ist.
Betrachten wir die lineare Abbildung T^{-1} jedoch als lineare Abbildung der Ausgangsbasis $\mathcal{C}$ und der Endbasis $\mathcal{B}$ so erhalten wir folgendes. Die Abbildung T^{-1} sendet die Basis $\mathcal{C}$ nach

$$\begin{aligned} T^{-1}(c_1) &= T^{-1}(3e_1 + 4e_2) = 3(3e_1 + e_2) + 4e_1 = 13e_1 + 3e_2, \\ T^{-1}(c_2) &= T^{-1}(2e_1 + 3e_2) = 2(3e_1 + e_2) + 3e_1 = 9e_1 + 2e_2. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

was wir zeigen wollten.

3. Sei $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbilfung, welche die Spiegelung bezüglich der Ebene $E : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ beschreibt. Finden Sie die zu r gehörende Matrix
   (a) bezüglich der Basis (v_1, v_2, n), wobei (v_1, v_2) eine Basis von E ist, und $n = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
   (b) bezüglich der Standardbasis.

Solution:

(a) Als Basis (v_1, v_2) von E kann man zum Beispiel

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verwenden.
Nun folgt aus der Definition von r dass $r(v_1) = v_1$, $r(v_2) = v_2$, und $r(n) = -n$, denn n ist ein Vektor, der senkrecht zur Ebene E steht und somit ist die Spiegelung des Vektors n an der Ebene E genau der Vektor $-n$.
Daher ist die Matrix von r bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (v_1, v_2, n)$:

$$[r]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(b) Nun wollen wir die Abbildungsmatrix von r bezüglich der Standardbasis $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$ beschreiben. Dazu brauchen wir die Transformationsmatrix $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ von der Basis $\mathcal{A}$ zur Basis $\mathcal{B}$, die wir bekommen indem wir folgende Systeme lösen:

$$e_i = \lambda_{1i} v_1 + \lambda_{2i} v_2 + \lambda_{3i} n,$$

für alle $1 \leq i, j \leq 3$ und $\lambda_{ji} \in \mathbb{R}$.

Genauer gesagt müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & -\lambda_{31} \\ 0 & -\lambda_{21} & -\lambda_{31} \\ -\lambda_{11} & 0 & -\lambda_{31} \end{pmatrix}$$

lösen. Dies führt zu $\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = \frac{1}{3}$. Gleichermassen, rechnen wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{12} & \lambda_{22} & -\lambda_{32} \\ 0 & -\lambda_{22} & -\lambda_{32} \\ -\lambda_{12} & 0 & -\lambda_{32} \end{pmatrix}$$

was zu $\lambda_{12} = \lambda_{32} = \frac{1}{3}$, und $\lambda_{22} = \frac{-2}{3}$ führt. Und noch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_{33} \\ 0 & -\lambda_{23} & -\lambda_{33} \\ -\lambda_{13} & 0 & -\lambda_{33} \end{pmatrix}$$

was $\lambda_{23} = \lambda_{33} = \frac{1}{3}$, und $\lambda_{13} = \frac{-2}{3}$ als Lösung hat. Somit ist

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = ([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1}$ ergibt sich

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden, dass $[r]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot [r]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ gilt, also ist

$$[r]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ ist. Zeige:

(a) Für jede Projektion P gilt

$$V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

(b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei beliebige Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$, sodass gilt:

$$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2\,.$$

Solution:

(a) Sei $P : V \to V$ eine Projektion und setze

$$W_1 := \mathrm{Kern}(P) \quad \text{und} \quad W_2 := \mathrm{Bild}(P)\,.$$

Wir müssen zeigen, dass $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = 0$ ist.

Für ein beliebiges $v \in V$ gilt

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0,$$

also ist $v - P(v) \in \mathrm{Kern}(P) = W_1$. Weiter ist $P(v) \in \mathrm{Bild}(P) = W_2$. Damit ist

$$v = (v - P(v)) + P(v)$$

eine Zerlegung von v in eine Summe von $v - P(v) \in W_1$ und von $P(v) \in W_2$.

Es bleibt also zu zeigen, dass $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sei dazu $v \in W_1 \cap W_2$. Da v im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$, sodass $P(w) = v$ ist. Wenden wir P auf beide Seiten der Gleichung an, so folgt $P^2(w) = P(w) = P(v)$. Da aber v ebenfalls im Kern von P ist, haben wir $0 = P(v) = P(w) = v$.

(b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei beliebige Untervektorräume von V mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann existiert für jedes $v \in V$ eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, sodass $v = w_1 + w_2$ ist. Definiere die Abbildung $P : V \to V$ durch $P(v) = w_2$, wobei $w_2 \in W_2$ das eindeutige Element in W_2 ist mit $v = w_1 + w_2$ für ein $w_1 \in W_1$. Man prüft nun direkt, dass P linear und eine Projektion mit $W_1 = \mathrm{Kern}(P)$ und $W_2 = \mathrm{Bild}(P)$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass P eindeutig ist. Sei P' eine weitere Projektion mit $W_1 = \mathrm{Kern}(P')$ und $W_2 = \mathrm{Bild}(P')$. Dann ist

$$P|_{W_1} = 0 = P'|_{W_1}\,.$$

Für ein beliebiges Element $w \in W_2$, gibt es Elemente $v, v' \in V$, so dass $P(v) = w$ und $P'(v') = w$ ist. Es folgt

$$P(w) - P'(w) = P(P(v)) - P'(P'(v')) = P(v) - P'(v') = w - w = 0$$

und damit stimmen P und P' auf W_2 überein, das heisst $P|_{W_2} = P'|_{W_2}$. Da $V = W_1 \oplus W_2$ ist, gilt damit $P = P'$, denn auf den beiden Untervektorräumen W_1 und W_2 sind P und P' identisch.

5. Betrachten Sie die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

(a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass das *orthogonale Komplement*

$$E^\perp := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (x', y', z') \in E : xx' + yy' + zz' = 0\}$$

ein nicht-trivialer Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und zeigen Sie $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^3$.

(c) Sei $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die *orthogonale Projektion* auf E, d.h. P ist eine Projektion mit $\mathrm{Ker}(P_E) = E^\perp$ und $\mathrm{Im}(P_E) = E$. (Wegen Aufgabe 3 wissen Sie schon, dass diese Projektion existiert.)
Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[P_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Bestimmen Sie $[P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$, wobei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Solution:

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto x - y + z$. Dann ist f linear, da $f = T_{(1,-1,1)}$ und $E = \mathrm{Ker}(f)$, also ist E ein Unterraum. Wir bemerken, dass $f \neq 0$, da

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Folglich ist $\mathrm{Rang}(f) \geq 1$ und da $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, folgt $\mathrm{Rang}(f) = 1$. Also ist $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{Rang}(f) = 2$.

(b) Für zwei gegebene Vektoren $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, schreiben wir

$$\langle v, v' \rangle := xx' + yy' + zz'$$

Seien $v'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben, dann ist

$$\begin{aligned} \langle v, v' + \lambda v'' \rangle =& x(x' + \lambda x'') + y(y' + \lambda y'') + z(z' + \lambda z'') \\ =& xx' + yy' + zz' + \lambda(xx'' + yy'' + zz'') \\ =& \langle v, v' \rangle + \lambda \langle v, v'' \rangle \end{aligned}$$

Also ist $\langle v, v' \rangle$ linear in der zweiten Komponente.

Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E (vgl. Teilaufgabe a). Dann impliziert die obige Rechnung, dass $v \in E^\perp$ genau dann, wenn $\langle v, v_1 \rangle = \langle v, v_2 \rangle = 0$ gilt. Dieselbe Rechnung wie vorhin angewendet auf die erste Komponente zeigt, dass die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

gegeben durch $f_1 : v \mapsto \langle v, v_1 \rangle$ und $f_2 : v \mapsto \langle v, v_2 \rangle$ linear sind. Also gilt

$$E^\perp = \operatorname{Ker}(f_1) \cap \operatorname{Ker}(f_2).$$

Da $v_1, v_2 \neq 0$, sind f_1, f_2 nicht-trivial: gegeben k existiert ein $1 \leq i \leq 3$ so dass $f_k(e_i) \neq 0$; sei nämlich i so gewählt, dass die i-te Komponente von v_k nicht 0 ist, dann ist $f_k(e_i)$ gleich der i-ten Komponente von v_k und somit ist $f_k \neq 0$. Dies zeigt, dass $\dim \operatorname{Ker}(f_1) = \dim \operatorname{Ker}(f_2) = 2$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim E^\perp &= \dim \big(\operatorname{Ker}(f_1) \cap \operatorname{Ker}(f_2)\big) \\ &= \dim \operatorname{Ker}(f_1) + \dim \operatorname{Ker}(f_2) - \dim(\underbrace{\operatorname{Ker}(f_1) + \operatorname{Ker}(f_2)}_{\subset \mathbb{R}^3}) \geq 1 \end{aligned}$$

Angenommen $v = (x, y, z) \in E \cap E^\perp$, dann ist

$$0 = \langle v, v \rangle = x^2 + y^2 + z^2$$

und folglich $v = 0$. Also ist

$$\dim(E + E^\perp) = \dim E + \dim E^\perp - \dim(E \cap E^\perp) \geq 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

und es folgt $\mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp$. Man beachte, dass dies zeigt, dass

$$\dim E^\perp = \dim(E \oplus E^\perp) - \dim E = \dim \mathbb{R}^3 - 2 = 1.$$

(c) Wir haben in Aufgabe 3 bereits gezeigt, dass $w = P_E(v)$ genau dann gilt, wenn $w \in E$ und $v - P_E(v) \in E^\perp$. Daraus folgt, dass $P_E(v) = v$ für alle $v \in E$. Sei also $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E, dann ist $P_E(v_1) = v_1$ und $P_E(v_2) = v_2$. Falls $\{v_3\}$ eine Basis von $E^\perp$, dann ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $[P_E]_\mathcal{B}$ hat die gewünschte Form. Es bleibt, v_1, v_2, v_3 explizit zu bestimmen.
Man überprüft leicht, dass z. B. $v_1 = (1, 2, 1)$ und $v_2 = (1, 0, -1)$ in E liegen. Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ gilt

$$0 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$$

und folglich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von E.
Wir wählen $v_3 = (-2, 2, -2)$, d.h. $v_3 = v_1 \times v_2$, wobei $\times$ das in der Schule diskutierte Kreuzprodukt beschreibt. Dann ist $v_3 \in E^\perp$. Alternativ bestimmt man den Vektor $v_3 = (x, y, z)$ als eine der Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 = \langle (x, y, z), v_1 \rangle &= x + 2y + z \\ 0 = \langle (x, y, z), v_2 \rangle &= x - z \end{aligned}$$

Wie eingangs beschrieben, ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis für die gilt

$$[P_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\mathcal{B}$ in keiner Weise eindeutig ist. Beispielsweise ist $\{v_3'\}$ gegeben durch $v_3' = (1, -1, 1)$ ebenfalls eine Basis von $E^{\perp}$. Also gilt für $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3')$ ebenfalls

$$[P_E]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = [P_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Wir verwenden $[P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} [P_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$. Es gilt sicherlich

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Für die Umkehrung des Basiswechsels überlegen wir uns, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Wir lösen nun $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = e_j$ für $j = 1, 2, 3$ und erhalten

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad [e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad [e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Matrix hätte man nahezu unmöglich direkt berechnen können. Die Verwendung von Basiswechselmatrizen erscheint auf den ersten Blick vielleicht als Umweg, sie macht das Argument im Grunde genommen aber relativ einfach und es gibt nur wenig Gelegenheit Fehler zu machen, insbesondere wenn wir später lernen $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$ direkt anhand von $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$ zu bestimmen.

6. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $V_n = \langle 1, \ldots, t^n \rangle \subset \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Es sei $B_n = (1, \ldots, t^n)$ eine Basis und

$$\mathrm{D}_n \colon V_n \to V_{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{m} k a_k t^{k-1}$$

der Ableitungshomomorphismus.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{B}_n}_{\mathcal{B}_{n-1}}$.

(b) Wir betrachten das geordnete Tupel $C_n = (1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+\ldots+t^n)$ in V_n. Zeigen Sie, dass C_n eine Basis von V_n ist und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $[\mathrm{id}_{V_n}]^{B_n}_{C_n}$ und $[\mathrm{id}_{V_n}]^{C_n}_{B_n}$.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]^{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}_{n-1}}$.

Solution:

(a) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren $1, \ldots, t^n$ in der Basis B_{n-1}:

$$\mathrm{D}_n(1) = 0\,, \mathrm{D}(t) = 1\,, \mathrm{D}(t^2) = 2t\,, \ldots, \mathrm{D}(t^n) = nt^{n-1}\,.$$

Folglich ist

$$[\mathrm{D}]^{B_n}_{B_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

(b) Da $t^i = (1+\ldots+t^i) - (1+\ldots+t^{i-1})$ wird V_n durch C_n erzeugt. Da C_n aus $n+1 = \dim V_n$ Vektoren besteht, sind diese auch linear unabhängig. Wir erhalten unmittelbar die Transformationsmatrizen

$$[\mathrm{id}_{V_n}]^{B_n}_{C_n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ [\mathrm{id}_{V_n}]^{C_n}_{B_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen

$$[\mathrm{D}]^{C_n}_{C_{n-1}} = [\mathrm{id}_{V_n}]^{B_{n-1}}_{C_{n-1}} \cdot [\mathrm{D}]^{B_n}_{B_{n-1}} \cdot [\mathrm{id}_{V_n}]^{C_n}_{B_n}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

7. (a) Sei $T\colon V \to V$ ein Isomorphismus eines Vektorraums V der Dimension n. Zeigen Sie, dass es Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gibt, sodass
$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \mathbf{1}_n.$$
Wann ist es auch möglich eine einzelne Basis $\mathcal{B}'$ zu finden, sodass $[T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = \mathbf{1}_n$ gilt?

(b) Es sei nun $T_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung der Linksmultiplikation mit der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
bezüglich der Standardbasis. Finden Sie solche Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Solution:

(a) Es sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine beliebige Basis von V. Dann ist die Menge
$$\{T(b_1), T(b_2), \dots, T(b_n)\}$$
auch eine Basis von V, da T per Annahme ein Isomorphismus ist.
Wir verwenden die Basis $(C) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, wobei wir $c_i = T(b_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ definieren.
Für diese Basen gilt somit
$$[T]^{\mathcal{B} = \mathbf{1}_n.}_{\mathcal{C}}$$
Wir sehen also, dass wir für einen Isomorphismus immer Basen von V wählen können, bezüglich welcher die Einheitsmatrix die lineare Abbildung beschreibt – und das obwohl T selbst im Allgemeinen **nicht** die Identitätsabbildung ist.
Es macht also durchaus Sinn sich auf eine einzelne Basis $\mathcal{B}$ des Vektorraums V festzulegen.
Eine Basis $\mathcal{B}'$ von V, sodass
$$[T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = \mathbf{1}_n$$
gilt, können wir dann und nur dann finden, wenn T die Identitätsabbildung ist. Tatsächlich ist diese Gleichung dann für jede Basis $\mathcal{B}'$ die wir wählen erfüllt.

(b) Da wir im ersten Teil der Aufgabe gesehen haben, dass die Wahl der Basis $\mathcal{B}$ irrelevant war, verwenden wir die Standardbasis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Die Basis $\mathcal{C}$ wählen wir dann als das Bild der Basis $\mathcal{B}$ unter der Abbildung T_A, das heisst

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(Überprüfe selbst, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind, und damit tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ergeben.)
Dann gilt

$$[T_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$