Lineare Algebra - Lösungen 9

1. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen von $\ker(T)$ und $\operatorname{im}(T)$.

Solution:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Ax = 0$ erhällt man $(1, -2, 1)^t$ als Basis von $\ker(T_A)$. Die Spaltenvektoren von A spannen $\operatorname{im}(T_A)$ auf, und da A zwei linear unabhängige Spaltenvektoren besitzt gilt $\operatorname{im}(T_A) = \mathbb{R}^2$, also ist zum Beispiel die Standartbasis eine Basis von $\operatorname{im}(T_A)$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Bx = 0$ erhällt man $(1, 0, 0, -1, -1)^t, (0, 1, -1, -1, -1)^t$ als Basis von $\ker(T_B)$. Die ersten beiden Spaltenvektoren lassen sich durch die letzten drei ausdrücken, und diese drei sind offensichtlich linear unabhängig. Also bilden die letzten drei Spaltenvektoren eine Basis von $\operatorname{im}(T_B)$.

(c) $C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, T_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sei zunächst $(a, b)^t \neq 0$, $(c, d)^t \neq 0$. Jedes $(x, y) \in \ker(T_C)$ erfüllt

$$0 = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acx + ady \\ bcx + bdy \end{pmatrix} = (cx + dy) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dies gilt genau dann wenn $cx + dy = 0$ und somit

$$\ker(T_C) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid cx + dy = 0\}.$$

Da $xc + dy$, für$(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen kann folgt aus der obigen Gleichung $\operatorname{im}(T_C) = \langle (a, b)^\top \rangle$.

Falls $(a, b)^t = 0$ oder $(c, d)^t = 0$, so ist $T_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Nullabbildung und wir erhalten $\ker(T_C) = \mathbb{R}^2$ und $\operatorname{im}(T_C) = \{0\}$.

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Für zwei beliebige $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W ist $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein Untervektorraum des Raumes W^V aller Abbildungen $V \to W$.

(b) Für zwei beliebige lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ ist die Abbildung

$$C_{g,f} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

wohldefiniert und linear. Sind zudem f und g Isomorphismen, so auch $C_{g,f}$.

Solution:

(a) Die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ enthält die Nullabbildung, ist also nicht leer. Für beliebige lineare Abbildungen $h_1, h_2 : V \to W$ gilt

$$\begin{aligned}(h_1 + h_2)(v_1 + v_2) &= h_1(v_1 + v_2) + h_2(v_1 + v_2)\\ &= h_1(v_1) + h_1(v_2) + h_2(v_1) + h_2(v_2)\\ &= (h_1 + h_2)(v_1) + (h_1 + h_2)(v_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(h_1 + h_2)(\lambda v_1) &= h_1(\lambda v_1) + h_2(\lambda v_1)\\ &= \lambda h_1(v_1) + \lambda h_2(v_1)\\ &= (\lambda \cdot (h_1 + h_2))(v_1)\end{aligned}$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$. Damit ist die Abbildung $h_1 + h_2 : V \to W$ linear und liegt in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Mit einem analogen Argument folgt, dass auch $c \cdot h_1$ linear ist für alle $c \in K$, also $c \cdot h_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ist. Das zeigt, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein Untervektorraum ist.

(b) Sei $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein beliebiges Element. Dann ist die Abbildung

$$g \circ h \circ f : V' \to W'$$

als Verknüpfung der linearen Abbildungen f und h und g wieder linear und liegt also in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', W')$. Das zeigt, dass $C_{g,f}$ wohldefiniert ist.

Seien nun $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $c \in K$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}C_{g,f}(h_1 + h_2)(v') &= g \circ (h_1 + h_2) \circ f(v')\\ &= g((h_1 + h_2)(f(v')))\\ &= g(h_1(f(v')) + h_2(f(v')))\\ &= g(h_1(f(v'))) + g(h_2(f(v')))\\ &= C_{g,f}(h_1)(v') + C_{g,f}(h_2)(v')\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
C_{g,f}(c \cdot h_1)(v') &= g(c \cdot h_1(f(v'))) \\
&= c \cdot g(h_1(f(v'))) \\
&= c \cdot C_{g,f}(h_1)(v') \\
&= (c \cdot C_{g,f}(h_1))(v')
\end{aligned}
$$

für alle $v' \in V'$, woraus folgt:

$$
\begin{aligned}
C_{g,f}(h_1 + h_2) &= C_{g,f}(h_1) + C_{g,f}(h_2) \\
C_{g,f}(c \cdot h_1) &= c \cdot C_{g,f}(h_1)\,.
\end{aligned}
$$

Das zeigt, dass $C_{g,f}$ linear ist.

Seien nun f und g Isomorphismen mit Inversen f^{-1} beziehungsweise g^{-1}. Da f^{-1} und g^{-1} linear sind, ist die Abbildung

$$C_{g^{-1},f^{-1}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\, K(V', W') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

wohldefiniert und linear. Aus $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\, V'$ und $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_W$ folgt dann

$$
\begin{aligned}
C_{g^{-1},f^{-1}} \circ C_{g,f} &= \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)} \\
C_{g,f} \circ C_{g^{-1},f^{-1}} &= \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V',W')},
\end{aligned}
$$

die Abbildung $C_{g^{-1},f^{-1}}$ ist also eine Inverse zu $C_{g,f}$.

3. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten.
   (a) Zeigen Sie, dass
   $$F\colon\, P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})\ p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.
   (b) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

Solution:

(a) Wegen
$$(\lambda p + \mu q)' = (\lambda p)' + (\mu q)' = \lambda p' + \mu q'$$
für alle $p, q \in P_n(\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Ableitungsabbildung $p \mapsto p'$ linear.

Da die Verknüpfung linearer Abbildungen wieder linear ist, ist auch die Bildung der zweiten Ableitung linear. Da die Summe zweier linearer Abbildungen linear ist, ist somit auch $p \mapsto p'' + p'$ linear.

(b) Es gilt

$$F(x^j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ 1 & \text{für } j = 1 \\ jx^{j-1} + j(j-1)x^{j-2} & \text{für } j \geq 2\,. \end{cases}$$

Also die Darstellungsmatrix von F bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{C} = (1, x, \ldots, x^n)$ gleich

$$[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \left(j\delta_{i,j-1} + j(j-1)\delta_{i,j-2}\right)_{0 \leq i,j \leq n},$$

wobei die Indizierung der Matrix bei 0 beginnt.

Für $n \geq 2$ lässt sich diese Matrix alternativ auch schreiben als

$$[F]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Seien V ein Vektorraum, $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$, so dass es eine natürliche Zahl n gibt für die gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

Solution: Wir wissen, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)$ alle ungleich Null sind. Denn aus $F^i(v) = 0$ für $0 \leq i \leq n$ folgt $F^n(v) = F^{n-i}(F^i(v)) = 0$. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ mit

$$a_0 v + a_1 F(v) + \ldots + a_n F^n(v) = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = F^n(0) &= F^n\left(a_0 v + \ldots + a_n F^n(v)\right) \\ &= a_0 F^n(v) + a_1 F^{n+1}(v) + \ldots + a_n F^{2n}(v) = a_0 F^n(v) \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen $F^k(v) = 0$ für $k > n$ gebraucht haben. Wir schliessen daraus dass $a_0 = 0$ gelten muss. Also gilt

$$a_1 F(v) + \ldots + a_n F^n(v) = 0.$$

Wir argumentieren nun genau gleich wie im ersten Schritt. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= F^{n-1}(0) = F^{n-1}\left(a_1 F(v) + \ldots + a_n F^n(v)\right) \\ &= a_1 F^n(v) + \ldots + a_n F^{2n-1}(v) = a_1 F^n(v) \end{aligned}$$

woraus $a_1 = 0$ folgt. So können wir weiterfahren und daraus schliessen dass $a_i = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$ gelten muss. Also sind die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig.

5. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^4$:

   (a)
$$\begin{array}{rrrl} 4x & -9y & +2z & = 5 \\ 2x & +2y & +z & = 9 \\ -3x & & +8z & = 18 \\ x & -2y & +3z & = 9 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rrrl} -2a & -b & +7c & = 0 \\ 3a & +10b & -2c & = 3 \\ -2a & -2b & +6c & = 7 \end{array}$$

   (c)
$$\begin{array}{rrrrl} \diamondsuit & +6\heartsuit & +7\clubsuit & +12\spadesuit & = 1 \\ 2\diamondsuit & +5\heartsuit & +8\clubsuit & +11\spadesuit & = 1 \\ 3\diamondsuit & +4\heartsuit & +9\clubsuit & +10\spadesuit & = 1 \end{array}$$

Solution: Wir nutzen Satz 4.7.9 und Korollar 4.7.10 um die Anzahl an Lösungen zu bestimmen.

(a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ -3 & 0 & 8 & 18 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

haben beide Rang $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_b) = 3$ somit folgt nach Korollar 4.7.10 die Existenz einer eindeutigen Lösung x^*.

Diese Lösung ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 3 & 10 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$B_b = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 10 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

haben verschiedene Ränge $\mathrm{rk}(B) = 2$ und $\mathrm{rk}(B_b) = 3$ somit folgt nach Satz 4.7.9, dass das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist.

(a) Die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

und

$$C_b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 7 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

haben denselben Rang $\mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(C_b) = 2$. Da dieser Rang jedoch kleiner ist als die Anzahl an Variablen, gibt es keine eindeutige Lösung. Der Kern dieser Matrix ist nicht leer, somit gibt es unendlich viele Lösungen.

6. Beweisen Sie:
   (a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat genau dann Rang $\leq r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ gibt, so dass $C = AB$.
   (b) Ist $\mathrm{rk}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$ gelten.

Solution:

(a) Nach Serie 7, Aufgabe 2 ist $\mathrm{rk}(AB) \leq \min\{\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)\}$ und daher $\mathrm{rk}(C) \leq r$ falls $C = AB$ gilt. Andersherum nehmen wir an, dass $\mathrm{rk}(C) \leq r$. Wir betrachten C als darstellende Matrix einer linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ bzgl. der Standardbasen $\mathcal{E}_n$ bzw. $\mathcal{E}_m$. Dann ist f die Komposition

$$K^n \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\iota} K^m\,,$$

wobei die zweite Abbildung ι die Inklusion ist. Nach Wahl einer Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{im}(f)$ ist die erste Abbildung beschrieben durch eine Matrix $B = [f]^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{C}}$, die zweite Abbildung durch eine Matrix $A = [\iota]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_m}$ und daher $C = AB$.

Alternativer Beweis für die Rückrichtung: Wir haben gesehen, dass jede $m \times n$-Matrix C äquivalent ist zur Normalform $N = \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mit $r' = \text{rk}(C)$, also $C = SNT$, mit $S \in \text{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$, $T \in \text{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertierbar. Da aber $N = XY$ mit $X = \begin{pmatrix} E_{r'} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \end{pmatrix}$, können wir schreiben

$$C = \underbrace{SX}_{A}\underbrace{YT}_{B}.$$

Falls $r' < r$ können wir einfach $r - r'$ Nullzeilen bzw. Nullspalten hinzufügen.

(b) Falls $\text{rk}(A) < r$ oder $\text{rk}(B) < r$ erhalten wir nach Serie 7, Aufgabe 2 direkt einen Widerspruch. Andererseits kann der Rang der Matrizen A und B auch nicht grösser sein, als deren Anzahl an Spalten, bzw. Zeilen. Daher folgt $\text{rk}(A) = \text{rk}(B) = r$.