Lineare Algebra - Lösungen 10

1. Sei U ein beliebiger Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbestimmten gibt, dessen Lösungsmenge genau U ist.

Solution: Vorgehen: Wir konstruieren eine lineare Abbildung F, die genau U als Kern hat. Die zugehörige Abbildungsmatrix A liefert dann über $Ax = 0$ ein Gleichungssystem in n Gleichungen und n Unbekannten, das genau U als Lösung hat.

Da U ein Unterraum ist, gibt es eine Basis $u_1, \ldots, u_m$ von U mit $m \leq n$. Diese lässt sich zu einer Basis $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Nun können wir die lineare Abbildung F mit Kern U wiefolgt definieren:
Wir definieren $F(u_i) = 0$ für $1 \leq i \leq m$ und $F(v_j) = v_j$ für $m+1 \leq j \leq n$. Da $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis ist, ist F wohldefiniert und bei Konstruktion hat F genau U als Kern. Wie im Vorgehen weiter oben beschrieben, gibt es nun eine zu F zugehörige Matrix A, die die lineare Abbildung beschreibt. Es folgt, dass $Ax = 0$ ein Gleichungssystem mit den gewünschten Eigenschaften darstellt.

2. (a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.

   (b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$V^* \cong V_1^* \oplus V_2^*$$

   und beweisen Sie somit die Existenz eines solchen.

Solution:

(a) Sei $\alpha : V' \to K$ eine beliebige Linearform. Zu dem Unteraum V' wählen wir ein Komplement V'' in V und definieren die Abbildung $\widetilde{\alpha} : V \to K$ durch

$$\widetilde{\alpha}(v) := \alpha(v')$$

für jedes $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Wegen $V = V' \oplus V''$, ist $\widetilde{\alpha}$ wohldefiniert. Man zeigt nun direkt, dass α auch linear ist, also $\widetilde{\alpha} \in V^*$ gilt. Wegen $\widetilde{\alpha}_{|V'} = \alpha$ ist die Behauptung bewiesen.

(b) Definiere die Abbildung

$$\phi : V_1^* \oplus V_2^* \to V^*$$

wie folgt: Für ein beliebiges Element $(\alpha_1, \alpha_2) \in V_1^* \oplus V_2^*$ sei

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) : V \to K$$

diejenige Abbildung, für die

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2)(v) = \alpha_1(v_1) + \alpha_2(v_2)$$

für alle $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt. Man zeigt direkt, dass $\phi(\alpha_1, \alpha_2)$ linear ist; die Abbildung ϕ ist also wohldefiniert. Weiters kann man leicht zeigen, dass auch ϕ selbst eine lineare Abbildung ist.

Wir konstruieren nun die zu ϕ inverse Abbildung. Definiere die Abbildung

$$\psi : V^* \to V_1^* \oplus V_2^*$$

durch

$$\psi(\alpha) = (\alpha_{|V_1}, \alpha_{|V_2})$$

für alle $(\alpha : V \to K) \in V^*$. Man zeigt, dass die Abbildung ψ wohldefiniert und linear ist.

Behauptung: $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V^*}$ und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{V_1^* \oplus V_2^*}$.

Beweis. Sei $\alpha \in V^*$ und $v = v_1 + v_2 \in V$ wobei $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, dann folgt wegen

$$\phi \circ \psi(\alpha)(v) = (\psi(\alpha))_1(v_1) + (\psi(\alpha))_2(v_2) = \alpha_{|V_1}(v_1) + \alpha_{|V_2}(v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v)$$

die Aussage $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V^*}$.
Weiters seien $\alpha_i \in V_i^*$ und $\iota_i \colon V_i \to V$ die Inklusion für $i = 1, 2$. Dann ist

$$\psi(\phi(\alpha_1, \alpha_2))(v_1, v_2) = (\phi(\alpha_1, \alpha_2)_{|V_1}(\iota_i(v_1)), \phi(\alpha_1, \alpha_2)_{|V_2}(\iota_i(v_2))) = (\alpha_1(v_1), \alpha_2(v_2))$$

und somit folgt $\psi(\phi(\alpha_1, \alpha_2)) = (\alpha_1, \alpha_2)$, also $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{V_1^* \oplus V_2^*}$. □

3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution: Zur Vorbereitung betrachten wir ein beliebiges $n \geq 0$ und eine beliebige invertierbare $(n \times n)$-Matrix U. Dann gilt erstens $U \cdot I_n \cdot U^{-1} = I_n$; also ist die Einheitsmatrix I_n nur zu sich selbst ähnlich. Zweitens seien A eine $(n \times n)$-Matrix und $B := UAU^{-1}$, also B ähnlich zu A. Dann gilt

$$B^2 = (UAU^{-1})(UAU^{-1}) = U(A^2)U^{-1};$$

also ist B^2 ähnlich zu A^2. Drittens sei $v \in K^n$ ein von Null verschiedener Vektor mit $Av = v$. Dann ist $w := Uv$ ein von Null verschiedener Vektor mit $Bw = (UAU^{-1})(Uv) = UAv = Uv = w$. Die Existenz eines von Null verschiedenen Vektors mit $Av = v$ ist also invariant unter Ähnlichkeit!

Aus unserer ersten Überlegung ist A_5 zu keiner anderen Matrix A_i ähnlich.
Sodann sieht man durch Konjugieren mit der Vertauschungsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dass A_1 ähnlich zu A_4, und A_2 ähnlich zu A_3 ist. Weiter sind A_2^2 und A_3^2 und A_7^2 gleich der Nullmatrix, die übrigen A_i^2 aber nicht. Wegen $\mathrm{Kern}(T_{A_7}) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ probieren wir Konjugation von A_7 mit der Matrix $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, und erhalten

$$U^{-1} A_7 U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3 .$$

Also sind A_3 und A_7 zueinander ähnlich.
Wegen $\mathrm{Kern}(T_{A_6}) = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ probieren wir Konjugation von A_6 mit der Matrix $V := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, und erhalten

$$V^{-1} A_6 V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_8 .$$

Also ist A_6 ähnlich zu A_8.
Schliesslich existiert ein von Null verschiedener Vektor $v := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $A_1 v = v$, aber kein von Null verschiedener Vektor $w \in K^2$ mit $A_8 w = w$. Also sind A_1 und A_8 nicht ähnlich. Da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt insgesamt, dass A_2, A_3 und A_7, beziehungsweise A_1 und A_4, beziehungsweise A_6 und A_8 ähnlich sind, aber keine weiteren Ähnlichkeiten der A_i existieren.

4. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die dazu duale Basis des Dualraums V^*, und sei $(k_1, \ldots, k_n)$ die zu B^* duale Basis des Bidualraums $(V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$. Zeigen Sie, dass der natürliche Isomorphismus
$$\mathrm{ev}\colon V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*,\ v \mapsto \mathrm{ev}_v$$
jedes v_j auf das entsprechende k_j abbildet. Hier ist ev_v die Evaluationsabbildung in v, das heisst für alle $l \in V^*$ gilt $\mathrm{ev}_v(l) = l(v)$.

Solution: Die duale Basis $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ ist charakterisiert durch die Bedingung

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

für alle i, j. Analog gilt

$$k_j(v_i^*) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

für alle i, j. Ausserdem ist die Evaluationsabbildung ev_v definiert durch $\mathrm{ev}_v(\ell) = \ell(v)$ für alle

$v \in V$ und $\ell \in V^*$. Für alle i, j folgt daher

$$\mathrm{ev}_{v_j}(v_i^*) = v_i^*(v_j) \;=\; \left.\begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}\right\} = \; k_j(v_i^*).$$

Somit stimmen die beiden linearen Abbildungen $\mathrm{ev}_{v_j}\colon V^* \to K$ und $k_j\colon V^* \to K$ auf der Basis $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ von V^* überein, und sind daher identisch.

5. Bestimmen Sie die Ränge der folgenden $(n \times n)$-Matrizen in Abhängigkeit der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(k\ell\,)_{k,\ell=1,\ldots,n}$

   (b) $\big((-1)^{k+\ell}\,(k+\ell-1)\big)_{k,\ell=1,\ldots,n}$

   (c) $\left(\dfrac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\right)_{k,\ell=0,\ldots,n-1}$

Solution:

(a) Wir setzen $B := (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} := (kl)_{k,l=1,\ldots,n}$. Sei $B' = (b'_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ die Matrix, die aus B entsteht, indem man für jedes $k = 2, \ldots, n$ das k-fache der ersten Zeile von der k-ten Zeile subtrahiert. Dann gilt

$$b'_{kl} = \begin{cases} b_{kl} = l & \text{falls } k = 1 \\ b_{kl} - kb_{1l} = kl - kl = 0 & \text{falls } k > 1\,. \end{cases}$$

Daher hat die Matrix B' genau eine nicht verschwindende Zeile und somit Rang 1. Da B' durch elementare Zeilenoperationen aus B entstanden ist, also durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix, hat B' denselben Rang wie B. Also folgt $\mathrm{rk}(B) = 1$.

Alternative Überlegung: Sei $u := (1, \ldots, n)$ die $1 \times n$ Matrix mit Eintrag i an der Position $(1, i)$. Dann gilt $B = u^T \cdot u$. Da $\mathrm{rk}(u) \leq 1$ ist, folgt aus einem früheren Aufgabe, dass auch $\mathrm{rk}(B) \leq 1$ ist. Wegen $B \neq 0$ gilt zudem $\mathrm{rk}(B) \geq 1$ und daher $\mathrm{rk}(B) = 1$.

(b) Sei $B := (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ mit $b_{kl} := (-1)^{k+l}(k+l-1)$. Für $n = 1$ ist $B = (1) \neq 0$ und hat somit Rang 1, wir können also $n \geq 2$ annehmen. Für alle $k = 1, \ldots, n-2$ und $\ell = 1, \ldots, n$ gilt

$$b_{kl} + 2b_{k+1,l} + b_{k+2,l} = 0,$$

also ist die k-te Zeile von B eine Linearkombination der $(k+1)$-ten und der $(k+2)$-ten Zeile. Man kann B daher durch Zeilenoperationen zu einer Matrix umformen, in der alle Einträge aller Zeilen, bis auf die letzten beiden, verschwinden und die letzten beiden Zeilen mit denen von B übereinstimmen. Man prüft dann direkt, dass diese beiden Zeilen linear unabhängig sind. Es folgt

$$\mathrm{Rang}\, B = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 2 & \text{falls } n \geq 2. \end{cases}$$

(c) Sei $C_n := (c_{kl})_{k,l=0,\dots,n-1}$ die Matrix mit $c_{kl} := \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = \binom{k+l}{l}$.

Behauptung: $\mathrm{rk}(C_n) = n$. Wir benutzen Induktion über n. Im Fall $n = 1$ stimmt die Behauptung, da $C_1 = (1) \neq 0$ ist. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 1$. Sei $C' = (c'_{kl})_{k,l=0,\dots,n}$ die Matrix, welche aus C_{n+1} entsteht, indem man beginnend mit der letzten Zeile jeweils die vorhergehende Zeile subtrahiert. In Formeln:

$$c'_{kl} := \begin{cases} c_{kl} - c_{k-1,l} & \text{falls } k = 1, \dots, n \\ c_{0l} & \text{falls } k = 0\,. \end{cases}$$

Sei weiter $C'' = (c''_{kl})_{k,l=0,\dots,n}$ diejenige Matrix, welche aus C' entsteht, indem man beginned mit der letzten Spalte jeweils die vorhergehende Spalte subtrahiert. In Formeln:

$$c''_{kl} := \begin{cases} c'_{kl} - c'_{k,l-1} & l = 1, \dots, n \\ c'_{k0} & l = 0\,. \end{cases}$$

Für alle $1 \leq k, l \leq n$ gilt dann

$$\begin{aligned} c''_{kl} &= c'_{kl} - c'_{k,l-1} \\ &= (c_{kl} - c_{k-1,l}) - (c_{k,l-1} - c_{k-1,l-1}) \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{(k-1)!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{k!(\ell-1)!} + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\left(1 - \frac{k}{k+1} - \frac{l}{k+l}\right) + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!}\,. \end{aligned}$$

Daher ist

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\mathrm{rk}(C_{n+1}) = \mathrm{rk}(C'') = 1 + \mathrm{rk}(C_n) = n + 1.$$