Lineare Algebra - Lösungen 11

1. Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Sei $B'^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ die zu B' duale Basis von W^*. Zeigen Sie, dass für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt
$$([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})_{ij} = w_i^*(f(v_j)) \quad \text{für alle } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Solution: Die Darstellungsmatrix $A := (a_{lk})_{lk} := [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ von f bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ ist definiert durch
$$f(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k$$
für alle $1 \le i \le m$.
Damit gilt für jedes $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$, dass
$$w_i^*(f(v_j)) = w_i^*(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_i^*(w_k) = a_{ij} = ([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})_{ij},$$
was genau zu zeigen war.

2. Finden Sie die Annulatoren der folgenden Unterräume
   (a) $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \le \mathbb{R}^2$
   (b) $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \le \mathbb{R}^3$
   (c) $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \le \mathbb{R}^3$
   (d) $U_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \le \mathbb{R}^4$

Solution:

(a) Wir stellen fest, dass $\binom{1}{2}, \binom{4}{3}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Dementsprechend ist $U_1 = \mathbb{R}^2$ und somit ist $U_1^\perp = \{0\} \le (\mathbb{R}^2)^*$, also nur die Nullabbildung.

(b) Der Unterraum U_2 hat Dimension 2. Also folgt, dass U_2^* die Dimension 1 hat. Wir suchen also ein Element $\ell \in (\mathbb{R}^3)^*$, sodass
$$\ell(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0, \quad \ell(-2e_1 + e_2 + e_3) = 0$$

gilt. Schreiben wir $\ell = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$ in der dualen Basis der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$, so folgen die beiden Gleichungen

$$2b = a + c, \quad 2a = b + c.$$

Diese Gleichungen sind nur für $a = b = c$ erfüllt. Daher gilt

$$U_2^\perp = \langle e_1^* + e_2^* + e_3^* \rangle.$$

(c) Analog wie in (b) argumentieren wir, dass $U_3^\perp$ die Dimension 2 hat. Es reicht also zwei linear unabhängige Elemente ℓ_1 und ℓ_2 in $U_3^\perp$ zu finden. Wir wählen $\ell_1 = e_3^*$, sowie $\ell_2 = 3e_1^* + 2e_2^*$. Diese Elemente sind offensichtlich linear unabhängig und es gilt

$$\ell_1(-2e_1 + 3e_2) = e_3^*(-2e_1 + 3e_2) = 0,$$
$$\ell_2(-2e_1 + 3e_2) = (3e_1^* + 2e_2^*)(-2e_1 + 3e_2) = 3e_1^*(-2e_1 + 3e_2) + 2e_2^*(-2e_1 + 3e_2) = -6 + 6 = 0.$$

Daher ist $U_3^\perp = \langle \ell_1, \ell_2 \rangle$.

(d) Es gilt $\ell = ae_1^* + be2^* + ce_3^* + de_4^* \in U_4^\perp$ dann und nur dann wenn

$$0 = \ell(e_1 + e_2) = a + b$$

und

$$0 = \ell(e_2 + e_3 - e_4) = b + c - d$$

gilt. Daher ist

$$U_4^\perp = \{-be_1^* + be2^* + ce_3^* + (b + c)e_4^* \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \langle -e_1^* + e_2^* + e_4^*, e_3^* + e_4^* \rangle.$$

3. Sei $n \geq 1$. Dann definieren wir das *kanonische Skalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$ als

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

(a) Sei $u \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\ell_u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle u, v \rangle$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_n}\}$ eine Basis des Dualraums $(\mathbb{R}^n)^*$ ist.

(c) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist *orthogonal* zu $u \in \mathbb{R}^n$, falls $v \in \ker(\ell_u)$ gilt. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\langle u \rangle^\perp \cong \ker(\ell_u)$$

gibt. Das heisst, der Annulator von $\langle u \rangle$ ist Isomorph zum Untervektorraum aller Vektoren, die orthogonal zu u sind.

(d) Folgern Sie, dass für einen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^n$ gilt

$$U^\perp \cong \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u),\ \forall u \in U\}.$$

(e) Bestimmen Sie diejenigen Unterräume von $\mathbb{R}^3$, die den Annulatoren der Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

entsprechen.

Solution:

(a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\ell_u(v + \lambda w) &= \langle (x_1, \ldots, x_n), (v_1 + \lambda w_1, \ldots, v_n + \lambda w_n) \rangle = u_1(v_1 + \lambda w_1) + \cdots + u_n(v_n + \lambda w_n) \\ &= u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n + \lambda u_1 w_1 + \cdots + \lambda u_n w_n = \ell_u(v) + \lambda \ell_u(w),\end{aligned}$$

und somit ist ℓ_u für alle $u \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

(b) Wir wissen, dass der Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ auch die Dimension n hat. Somit reicht es zu zeigen, dass $\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_n}$ linear unabhängig sind. Seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gewählt, sodass

$$\lambda_1 \ell_{b_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{b_n} = 0.$$

Das heisst, für alle $b \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(\lambda_1 \ell_{b_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{b_n})(b) = 0.$$

Insbesondere ist das für die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ der Fall. Wir erhalten also

$$0 = (\lambda_1 \ell_{b_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{b_n})(e_i) = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_n a_{in}, \tag{1}$$

für alle $1 \leq i \leq n$, wobei a_{ij} die Koeffizienten von b_j bezüglich der Standardbasis sind, also $b_j = a_{1j} e_1 + \cdots + a_{nj} e_n$.
Schreiben wir die Gleichungen in (1) in ein Gleichhungssystem ergibt das für die Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$

$$A \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Da die Basiswechselmatrix $A = [id]^{(b_1,\ldots,b_n)}_{(e_1,\ldots,e_n)}$ jedoch invertierbar ist, folgt

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Also ist $(\ell_{b_1}, \ldots, \ell_{b_n})$ linear unabhängig und somit eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$.

(c) Zuerst überprüfen wir den Fall $u = 0$. Dann gilt $\langle 0 \rangle^\perp = (\mathbb{R}^n)^*$ sowie $\ker(\ell_0) = \mathbb{R}^n$. Für eine Belibiege Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$ wissen wir durch die vorherige Teilaufgabe, dass die Abbildung

$$b_i \to \ell_{b_i}$$

einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und dessen Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ beschreibt.
Sei nun $u \neq 0$. Wie zuvor definieren wir die Abbildung $\phi\colon \ker(\ell_u) \to \langle u \rangle^\perp, \phi(v) = \ell_v$. Dann gilt

$$\phi(v)(u) = \ell_v(u) = \langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle = \ell_u(v) = 0,$$

also ist ϕ auch wirklich wohldefiniert. Hier gilt die dritte Gleichung aufgrund der Tatsache, dass das Skalarprodukt per Definition symmetrisch ist, und die letzte Gleichung da v in $\ker(\ell_u)$ liegt.
Es lässt sich ausserdem leicht zeigen, dass ϕ eine lineare Abbildung ist. Des Weiteren ist die Dimension von $\langle u \rangle$ gleich $(n-1)$. Doch auch die Dimension von $\ker(\ell_u)$ ist $(n-1)$, denn

$$\dim(\ker(\ell_i)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\operatorname{im}(\ell_i)) = n - 1.$$

Es gilt $\ell_u(u) = u_1^2 + \ldots u_n^2 \neq 0$, da u laut Annahme nicht der Nullvektor ist, also hat das Bild von ℓ_u auch tatsächlich die Dimension 1.
Zusammenfassend erhalten wir, dass ϕ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen derselben Dimension ist. Also ist ϕ genau dann ein Isomorphismus, wenn ϕ injektiv ist.
Sei $v \neq 0$ in $\ker(\ell_u)$, dann folgt

$$\phi(v)(v) = \ell_v(v) = v_1^2 + \ldots v_n^2 \neq 0,$$

somit kann $\phi(v)$ nicht die Nullabbildung in $(\mathbb{R}^n)^*$ sein, also ist ϕ ist injektiv und somit ein Isomorphismus.

(d) Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U. Dann ist $\ell \in U^\perp$ dann und nur dann, wenn $\ell(u_i) = 0$, also $\ell \in \langle u_i \rangle^\perp$, für alle $1 \leq i \leq m$ gilt. Das heisst

$$\ell \in U^\perp \Leftrightarrow \ell \in \bigcap_{i=1}^{m} \langle u_i \rangle^\perp.$$

Nach der vorherigen Teilaufgabe erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^{m} \langle u_i \rangle^\perp \cong \bigcap_{i=1}^{m} \ker(\ell_{u_i})$$

in dem wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}^n &\to (\mathbb{R}^n)^*, \\ v &\mapsto \ell_v \end{aligned}$$

auf den Unterraum $\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\ell_{u_i})$ einschränken. Jedoch ist

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\ell_{u_i}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \ell_{u_i}(v) = 0,\ \forall 1 \leq i \leq m\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u),\ \forall u \in U\}$$

aufgrund der Linearität von ϕ. Das heisst

$$U^{\perp} \cong \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in \ker(\ell_u),\ \forall u \in U\}.$$

(e) Aus Dimensionsgründen und den vorherigen Teilen der Aufgabe wissen wir, dass es reicht zwei Vektoren v_1 und v_2 zu finden, die orthogonal zu den Basisvektoren von U_1 beziehungsweise U_2 sind.
Als v_1 wählen wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dann gilt $\langle v_1 \rangle \cong U_1^{\perp}$.
Als v_2 wählen wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dann gilt $\langle v_2 \rangle \cong U_2^{\perp}$.

4. Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome von Grad kleiner gleich 3. Für $i \in \{0,1,2,3\}$ definieren wir die Abbildungen $f_i : V \to \mathbb{R}$ durch $f_i(p) = \int_0^1 p^{(i)}(t)\,dt$ für alle Polynome $p \in V$ und wobei $p^{(i)}$ die i-te Ableitung des Polynomes p ist.
   (a) Finden Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Evaluationsabbildung $\mathrm{ev}_x \colon V \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p(x)$ ein Element von V^* beschreibt.
   (b) Zeigen Sie, dass (f_0, f_1, f_2, f_3) eine Basis des Dualraumes V^* von V ist.
   (c) Drücken Sie die Elemente der zur Standardbasis $(1, t, t^2, t^3)$ dualen Basis des Dualraumes V^* als Linearkombination der Elemente der Basis (f_0, f_1, f_2, f_3) aus.

Solution:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Seien p_1, p_2 zwei Polynome vom Grad kleiner gleich 3 und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathrm{ev}_x(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)(x) = \mathrm{ev}_x(p_1) + \mathrm{ev}_x(p_2), \mathrm{ev}_x(\lambda p_1) = (\lambda p_1)(x) = \lambda p_1(x) = \lambda\, \mathrm{ev}_x(p_1)$$

und somit ist ev_x eine lineare Abbildung für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.
Das lässt einen vielleicht glauben, dass V^* unendlich-dimensional wäre, jedoch lässt sich Leicht berechnen, dass

$$\mathrm{ev}_{-2} - 4\,\mathrm{ev}_{-1} + 6\,\mathrm{ev}_0 - 4\,\mathrm{ev}_1 + \mathrm{ev}_2 = 0$$

gilt. Mit anderen Worten, gilt für jedes Polynom p vom Grad kleiner gleich 3, die Gleichung

$$p(-2) - 4p(-1) + 6p(0) - 4p(1) + p(2) = 0.$$

(b) Die Abbildungen f_0, f_1, f_2, f_3 sind Linearformen auf V, da sowohl Ableitung, als auch Integration linearformen sind. Sei $\mathcal{B}^* = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ die zu $(1, t, t^2, t^3)$ duale Basis von V^*. In der Basis $\mathcal{B}^*$ ausgedrückt, haben wir

$$(f_0)_{B^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad (f_1)_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (f_2)_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (f_3)_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Diese 4 Vektoren sind linear unabhängig, also ist (f_0, f_1, f_2, f_3) tatsächlich eine Basis von V^*.

(c) Um die duale Basis $\mathcal{B}^* = (\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ der Standardbasis $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$ als Linearkombination der Elemente der Basis $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ zu schreiben müssen wir nichts anderes tun, als die inverse der Matrix

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.
Eine leichte Rechnung zeigt

$$[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = ([id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$\ell_0 = f_0 - \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{12} f_2 \qquad \ell_1 = f_1 - \frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{12} f_3$$
$$\ell_2 = \frac{1}{2} f_2 - \frac{1}{4} f_3 \qquad \ell_3 = \frac{1}{6} f_3.$$

5. Gegeben seien zwei lineare Abbildungen $\varphi_1(x) = -6x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_5$ und $\varphi_2(x) = -7x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5$ von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}$.
Sei V der Unterraum $V = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in V liegen.

(b) Ergänzen Sie v_1 und v_2 zu einer Basis von V.

(c) Ergänzen Sie v_1 und v_2 zu einer Basis von V.

(d) Bestimmen Sie eine *Orthonormalbasis* von V, bezüglich dem kanonischem Skalarprodukt. Also eine Basis $\mathcal{B}$, für die verschiedene Elemente $u, v \in \mathcal{B}$ orthogonal zueinander stehen, das heisst $\langle u, v\rangle = 0$ und sodass $\langle u, u\rangle = 1$ für alle $u \in \mathcal{B}$ gilt.

Solution:

(a) Wir berechnen

$$\varphi_1(v_1) = -6 - 1 + 5 + 2 = 0, \quad \varphi_2(v_1) = -7 - 2 + 6 + 1 + 2 = 0$$

also ist v_1 in V und

$$\varphi_1(v_2) = -6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0, \quad \varphi_2(v_2) = -7 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0,$$

also liegt v_2 auch in V.

(b) Wir wählen den Vektor v_3 als

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\varphi_1(v_3) = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0, \quad \varphi_2(v_3) = -2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0$$

ist v_3 in V. Wir zeigen nun, dass v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind: Seien λ_1, λ_2 und λ_3 reelle Zahlen, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0, \\
\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0, \\
\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0, \\
\lambda_1 & & & & & = & 0, \\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0.
\end{array}$$

Aus der vierte Gleichung wissen wir, dass λ_1 gleich Null ist, also folgt jetzt aus der erster und zweiter Gleichungen, dass auch λ_2 und λ_3 gleich Null sind. Die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind also linear unabhängig. Wir müssen noch zeigen, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ der Unterraum V erzeugen oder äquivalenterweise, dass die Dimension von V kleiner gleich 3 ist. Es gilt, für $i = 1$ oder 2, dass

$$\dim(\ker(\varphi_i)) = 5 - \dim(\operatorname{im}(\varphi_i)) = 5 - 1 = 4.$$

Da φ_1 und φ_2 verschiedene Kerne haben (sonst würden sich φ_1 und φ_2 um einen Skalar unterscheiden) ist die Dimension von $V = \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2)$ kleiner gleich 3.

(c) Zuerst normieren wir den Vektor v_1 und erhalten

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun erfüllt u_1 die Bedingung $\langle u_1, u_1 \rangle = 1$.
Weiters berechnen wir

$$\langle u_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2+2+1) = \sqrt{5}.$$

Somit finden wir einen Vektor $\tilde{u}_2$ in V, der orthogonal zu u_1 ist, indem wir

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \sqrt{5}u_1$$

definieren. Denn dann gilt

$$\langle \tilde{u}_2, u_1 \rangle = \langle v_2 - \sqrt{5}u_1, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - \sqrt{5}\langle u_1, u_1 \rangle = 0.$$

Wir berechnen

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und normieren $\tilde{u}_2$ anschliessend und erhalten:

$$u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\langle \tilde{u_2}, \tilde{u_2} \rangle^{1/2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\langle u_1, v_3 \rangle = \langle u_2, v_3 \rangle = 0$ ist v_3 selbst schon orthogonal zu v_1 und v_2. Wir müssen v_3 noch normalisieren:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Basis (u_1, u_2, u_3) ist nun eine orthonormale Basis von V.