Musterlösung Serie 14

Determinant

1. Jeder der folgenden Ausdrücke definiert eine Funktion D auf der Menge der 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$. In welchen dieser Fälle ist D eine 3-lineare Funktion?

   (a) $D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

   (b) $D(A) = A_{11}^2 + 3A_{11}A_{22}$;

   (c) $D(A) = A_{11}A_{12}A_{33}$;

   (d) $D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32}$;

   (e) $D(A) = 0$;

   (f) $D(A) = 1$.

   Lösung:

   Note. In these solutions, we are considering 3-linearity with respects to rows (Zeilen). Note that even if it is the case for the determinant, row and column n-linearity is not always equivalent.

   $$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

   Diese Matrizen stellen Gegenbeispiele für (a), (b), (c) und (f) dar. In allen Fällen müsste $D(B_1) = 2D(B_2)$ gelten, wenn die Abbildung linear in der ersten Zeile wäre. Somit ist ein Gegenbeispiel zu (a) gegeben durch

   $$D(B_2) = 4 \neq 6 = 2(1 + 1 + 1) = 2D(B_1).$$

   Ein Gegenbeispiel für (b) ist

   $$D(B_2) = 10 \neq 8 = 2(1 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 2D(B_1).$$

   Ein Gegenbeispiel für (c) ist

   $$D(B_2) = 4 \neq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2D(B_1).$$

   Ein Gegenbeispiel für (f) ist

   $$D(B_2) = 1 \neq 2 = 2D(B_1).$$

Somit ist D in diesen Fällen **nicht** 3-linear.

Sei nun A eine beliebige Matrix mit Zeilen R_i, $i = 1, 2, 3$. Des Weiteren betrachten wir $D(A) = D(R_1, R_2, R_3)$ als eine Funktion der Zeilen von reellen 3×3 Matrizen. Sei $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n$ ein Zeilenvektor und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall (d) gilt dann

$$\begin{aligned} D(\lambda R_1 + \alpha, R_2, R_3) &= (\lambda A_{13} + \alpha_3) A_{22} A_{32} + 5(\lambda A_{12} + \alpha_2) A_{22} A_{32} \\ &= \lambda (A_{13} A_{22} A_{32} + 5 A_{12} A_{22} A_{32}) + (\alpha_3 A_{22} A_{32} + 5 \alpha_3 A_{22} A_{32}) \\ &= \lambda D(R_1, R_2, R_3) + D(\alpha, R_2, R_3). \end{aligned}$$

Somit ist D linear in der ersten Zeile, ähnliche Rechnungen zeigen, dass D auch in der zweiten und dritten Zeile linear ist. Somit ist D 3-linear.

Schliesslich gilt für (e)

$$D(\lambda R_1 + \alpha, R_2, R_3) = 0 = \lambda \cdot 0 + 0 = \lambda D(R_1, R_2, R_3) + D(\alpha, R_2, R_3),$$

also ist D linear in der ersten Zeile. Ähnliche Rechnungen zeigen, dass D auch linear in der zweiten und dritten Zeile ist. Zusammen ist D in diesem Fall 3-linear.

2. Beweise die folgende Proposition:

   Proposition (Satz 10.2.3 des Skripts)**.** *Es sei $A \in M_{n \times n}(K)$, und es sei B eine Matrix, die wir von A durch die elementare Zeilenumformung X erhalten.*

   (a) wenn $X = P(r, s)$ fuer $1 \leqslant r < s \leqslant n$, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$;

   (b) wenn $X = M(r, \lambda)$ fuer $1 \leqslant r \leqslant n$ und $\lambda \in K^\times$, dann gilt $\det(B) = \lambda \det(A)$;

   (c) wenn $X = S(r, s, \lambda)$ fuer $1 \leqslant r, s \leqslant n, r \neq s$ und $\lambda \in K^\times$, dann gilt $\det(B) = \det(A)$.

   Lösung: Sehe Prop. 4.2.3. der Vorlesungsnotizen von Menny Akka.

3. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i, j; und sei

   $$F_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \det \left(\left(\frac{1}{x_i - y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} \right).$$

   (a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel

   $$F_n(x_1, \ldots, y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)(y_i - y_n)}{\prod_{i=1}^{n} (x_i - y_n) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - y_i)} F_{n-1}(x_1, \ldots, y_{n-1}).$$

   Hint. Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Substrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

(b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1, \ldots, y_n)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

Lösung:

(a) Sei $A := (a_{ij})$ mit $a_{ij} := 1/(x_i - y_j)$. Durch die erste Subtraktion im Hinweis, die die Determinante nicht ändert, wird der Matrixeintrag a_{ij} für $j < n$ zu

$$b_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} - \frac{1}{x_i - y_n} = \frac{y_j - y_n}{(x_i - y_j)(x_i - y_n)},$$

während die Einträge in der letzten Spalten gleich bleiben: $b_{in} = 1/(x_i - y_n)$. Dann haben alle Einträge in der i-ten Zeile einen Faktor $1/(x_i - y_n)$ und alle Einträge in der j-ten Spalte mit $j < n$ einen Faktor $(y_j - y_n)$. Verwendet man die Linearität der Determinanten in den Zeilen und Spalten, so erhält man

$$\det A = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(y_j - y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_n)} \det C,$$

mit

$$C = (c_{ij}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Subtrahieren der letzten Zeile von allen anderen Zeilen wird der Eintrag c_{ij} für $i, j \leqslant n - 1$ zu

$$d_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} - \frac{1}{x_n - y_j} = \frac{x_n - x_i}{(x_i - y_j)(x_n - y_j)}$$

und die letzte Spalte ist $(0, \ldots, 0, 1)^T$. Es folgt dann wie oben

$$\det C = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(x_n - y_j)} \det(E)$$

mit

$$E := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(E) = F_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1})$ folgt die Behauptung.

(b) Mit einem Induktionsbeweis folgt die *Cauchysche Determinantenformel*

$$\det\left(\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}\right) = \frac{\prod_{i<j}(x_j - x_i)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j}(x_i - y_j)}.$$

(c) Mit $x_i = i$ und $y_j = -j + 1$ spezialisiert sich die Matrix aus der Aufgabe (a) zu der Matrix

$$(h_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

In diesem Fall lautet die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(n-i)(-i+n)}{\prod_{i=1}^{n}(i+n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(n+i-1)} F_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!^2}{n(n+1)\cdots(2n-1)n(n+1)\cdots(2n-2)} F_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!^4}{(2n-1)!(2n-2)!} F_{n-1} \end{aligned}$$

Aus $F_1 = 1$ erhalten wir dann

$$F_n = \frac{(n-1)!^4(n-2)!^4\cdots 1!^4}{(2n-1)!(2n-2)!(2n-3)!(2n-4)!\cdots 2!1!} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$$

4. Sei K ein kommutativer Ring mit 1. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Definiere M_{ij} als die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die sich aus der Streichung der Zeile i und Spalte j von A ergibt. Betrachte dann

$$C := \left((-1)^{i+j}M_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{und} \quad \operatorname{adj}(A) := C^T = \left((-1)^{i+j}M_{ji}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Sei ausserdem det die Determinantenfunktion auf $n \times n$-Matrizen uber K. Zeige:

(a) $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$;

(b) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$;

(c) $\operatorname{adj}\left(A^T\right) = (\operatorname{adj} A)^T$.

(A^T ist die Transponierte von A.)

Lösung:

(a) Nach Lemmata 10.3.9 und 10.3.10 des Skripts gilt, dass für $1 \leqslant i, k \leqslant n$, $i \neq k$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ij} = 0.$$

Für beliebige $1 \leqslant i, k \leqslant n$ ist die zweite obige Summe den Eintrag der Matrix $A \cdot \operatorname{adj}(A)$ an der Stelle (i, k). Es folgt, dass

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

Verwendung von diesen Sätzen mit A^T und Verwendung von (c) zeigen, dass

$$\operatorname{adj}(A) \cdot A = I_n.$$

(b) Es folgt aus (a) und der Eigenschaft, dass die Determinante multiplikativ ist, dass

$$\det(A) \det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^n.$$

Wenn $\det(A) \neq 0$ ist, sind wir fertig. Wenn A nicht invertierbar ist, benutzen wir Lemmata 10.3.9 und 10.3.10. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_{1j} = \det(A) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_{ij} = 0,\ 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Deshalb sind die Zeilen von C (d.h. die Spalten von $\operatorname{adj}(A)$) nicht linear unabhängig. Wir schließen daraus, dass

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = 0 = \det(A)^{n-1}.$$

(c) Dies ergibt sich aus einer direkten Berechnung.

5. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Bemerkung: Produkte dieser Art werden *Vandermonde Determinanten* genannt und die obige Matrix wird *Vandermonde Matrix* genannt.

Hint. Benutze die Formel

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2} y + \cdots + x y^{m-2} + y^{m-1})$$

und die vorhangehenden Übungen.

Lösung: Wir beweisen die Formel durch Induktion. Für $n = 2$ ist die Formel erfüllt, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

gilt. Betrachte nun die n-te Vandermonde Matrix, kurz V_n, und nehme an, dass die Formel für die $n-1$-te Determinante bereits bewiesen ist. Wir substrahieren die erste Zeile von jeder anderen Zeile, was die Determinante nicht ändert, und entwickeln dann nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned}\det V_n &= \det\begin{pmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_n-x_1 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1}\\ \vdots & & \vdots\\ x_n-x_1 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Erinnerung: es gilt die Formel

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}y+\cdots+xy^{m-2}+y^{m-1}).$$

Für jedes $i \in \{2,\ldots,n\}$, faktorisieren wir die $i-1$-te Zeile durch $(x_i - x_1)$ und nutzen n-Linearität der Determinante um diesen Faktor herauszuziehen. Wir erhalten

$$\det V_n = \prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\det\begin{pmatrix}1 & x_2+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2}x_1^k x_2^{n-2-k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2}x_1^k x_n^{n-2-k}\end{pmatrix}.$$

Bemerke, dass

$$\begin{pmatrix}1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{n-2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1^m\\ x_1^{m-1}\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{m} x_1^k x_i^{m-k}.$$

Also kann die letzte Matrix als das Produkt der Vandermonde Matrix

$$\begin{pmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2}\end{pmatrix}$$

mit der oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2}\\ 0 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Wir benutzen die Induktionshypothese zusammen mit der Multiplikativität der Determinante und erhalten

$$\begin{aligned}\det V_n &= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \cdot \prod_{2 \leqslant j < k \leqslant n-1} (x_k - x_j) \cdot 1 \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).\end{aligned}$$

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

   ◯ $x = -2$

   ✓ $x = 2$

   ◯ $x = -1$

   ◯ $x = 1$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn

$$\det \begin{pmatrix} x^n & x^{n+2} & x^{2n} \\ 1 & x^n & a \\ x^{n+5} & x^{a+6} & x^{2n+5} \end{pmatrix} = 0, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

   gilt, dann ist a gleich

   ◯ n

   ◯ $n - 1$

   ✓ $n + 1$

   ◯ Keine der obigen Möglichkeiten